

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 83

1. *Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt; von Friedrich Möglich*

Es ist verschiedentlich versucht worden, eine Theorie der Beugung an Ellipsoiden zu entwerfen. Schon Lord Rayleigh¹⁾ hat, unter der Voraussetzung, daß die Ellipsoide klein sind im Vergleich zur Wellenlänge der einfallenden Strahlung, Formeln angegeben, die die Störung eines elektromagnetischen Zustandes durch ein der erwähnten Bedingung genügendes Ellipsoid auszudrücken. R. Gans²⁾ hat dann diese Methode benutzt, um die Mieschen Untersuchungen³⁾ über die Optik trüber Medien zu vervollkommen. Abraham⁴⁾ und Ehrenhaft⁵⁾ beschäftigen sich mit der Untersuchung der elektrischen Schwingungen eines Rotationsellipsoides, eine Aufgabe, die wesentlich darauf hinausläuft, die Wellengleichung so zu integrieren, daß die elektromagnetischen Grenzbedingungen an der Oberfläche des die Schwingungen erregenden Ellipsoides erfüllt werden können. Diese Aufgabe ist mit den Mitteln der Analysis ohne weiteres zu bewältigen; allerdings werden bei dieser Aufgabe nur solche Funktionen zur Lösung gebraucht, die von der Azimutalkomponente unabhängig sind. In dieser Hinsicht sind die Probleme der Schwingungserregung wesentlich weniger kompliziert als die Beugungsprobleme, bei denen Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen gesucht werden müssen, die auch von der Azimutalkomponente abhängig sind. Solche Funktionen hat für den Fall des Rotationsellipsoides

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 43. S. 159; 44. S. 28; Scientific Papers 4. S. 283, 305.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 881. 1912; 47. S. 270. 1915.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. S. 377. 1908.

4) M. Abraham, Wied. Ann. 66. S. 435. 1898; Math. Ann. 52. S. 81. 1899.

5) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 113. S. 273. 1904.

not to
be
taken
from
Room

Niven¹⁾ aufgestellt, der zu ihnen geführt wurde, als er versuchte, die Wärmeströmung in einem homogenen Körper, dessen Oberfläche ein Rotationsellipsoid ist, zu berechnen, eine Aufgabe, die noch Heine²⁾ ungelöst zurücklassen mußte. Dem Wesen seines Zieles entspricht es, daß Niven nur solche Lösungen suchte, die im Endlichen endlich sind. Diese werden in der vorliegenden Arbeit als Grenzfälle wesentlich allgemeinerer Funktionen reproduziert werden auf einem Wege, der einwandfrei ist, im Gegensatz zu dem, auf dem Niven seine Funktionen findet. Gegen die Nivenschen Untersuchungen kann man vom mathematischen Standpunkte aus dieselben Einwände machen, die seinerzeit Dannacher³⁾ und nach ihm Mary Curtis⁴⁾ gegen den von Heine geführten Existenzbeweis für die Funktionen des elliptischen Zylinders erhoben. Aber nicht nur in dieser Hinsicht bedürfen die Nivenschen Untersuchungen einer Erweiterung, sondern auch die Integrale, die im Endlichen einen Pol haben, müssen gesucht werden. Auch diese werden sich als spezielle Fälle gewisser Funktionen im folgenden ergeben.

Besonders wichtig und vereinfachend ist es, wenn man die Integrale der Wellengleichung so in Reihenform darstellen kann, daß ein jedes Glied dieser Reihe für sich der Wellengleichung genügt. Solche Funktionen, die selbst Integrale der Wellengleichung, außerdem gewissermaßen die Elemente der allgemeinen Integrale darstellen, nennen wir Normalintegrale.

K. F. Herzfeld⁵⁾ hat zum erstenmal den Versuch unternommen, die Beugung an Rotationsellipsoiden zu berechnen. Es gelingt ihm nicht, Normalintegrale der Maxwell'schen Gleichungen zu finden. Die von ihm aufgestellten Reihen genügen nur in ihrer Gesamtheit den Maxwell'schen Gleichungen, nicht aber jedes einzelne Glied. Die Aufstellung der Reihen ist außerordentlich kompliziert, ihre Diskussion nahezu unmöglich und auch von Herzfeld nicht versucht.

1) C. Niven, Trans. of the Royal Soc. 171. S. 117. 1880.

2) E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen II, Verlag von Reimer. Berlin 1881, S. 323 ff.

3) K. Dannacher, Inaugural-Diss., Zürich 1906.

4) Mary Curtis, Annals of Math. 20. S. 23. 1918.

5) K. F. Herzfeld, Wiener Ber. 120. S. 1587. 1911.

Sudhansukumar Banerji¹⁾ beschäftigt sich mit der Integration der Wellengleichung in elliptischen Koordinaten. Diese führt er ein durch die Gleichungen

$$x = a \varrho \cos \vartheta; \quad y = b \varrho \cdot \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = c \cdot \varrho \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Dann sucht er Lösungen zu gewinnen, die denen in Polarkoordinaten ähnlich sind. Er muß jedoch zugeben, daß die von ihm gefundenen Integrale nur Näherungslösungen darstellen, die nicht einmal den Vorzug der Einfachheit haben.

Es ist bis jetzt noch nie versucht worden, die Beugung an einem dreiachsigen Ellipsoid zu untersuchen. Diese Aufgabe soll im folgenden durchgeführt werden. Dabei zeigt es sich, daß die Lösung für den Fall eines dreiachsigen Ellipsoides keineswegs theoretisch schwieriger zu behandeln ist, als der Fall des Rotationsellipsoides. In beiden Fällen führt die Auflösung der Wellengleichung auf lineare Differentialgleichungen, in denen über zwei verschiedene Parameter passend zu verfügen ist. Gerade diese Bestimmung der beiden Parameter ist die wesentliche Schwierigkeit des Problems. Die Aufgabe wird dadurch gelöst, daß man jedem der beiden Parameter die Eigenwerte gewisser Integralgleichungen zuordnet und nachweist, daß jedem dieser Eigenwerte ein bestimmter Parameterwert entspricht. Die Integrale der Differentialgleichung werden gewonnen als Lösungen dieser homogenen Integralgleichungen, die durch Verallgemeinerung einer zuerst von Whittaker gebrauchten Methode²⁾ aus einem allgemeinen Integral der Wellengleichung abgeleitet werden. Eine Beschränkung auf Rotationsellipsoide wird durch die Theorie in keiner Weise nahegelegt; nur in der numerischen Auswertung werden wir uns auf diesen Spezialfall beschränken, weil allein dieser rechnerisch durchführbar erscheint. Doch ist es nicht ausgeschlossen, daß nach Erledigung einiger mathematischer Vorfragen auch der allgemeine Fall rechnerisch wird durchgeführt werden können.

Die Maxwellschen Gleichungen befriedigen wir durch den Hertzschen Vektor. Dieser unterliegt nur der Be-

1) Sudhansukumar Banerji, Bull. of Calcutta Math. Soc. 1915.

2) E. T. Whittaker, Trans. 5. Int. Congress of Mathematicians, Cambridge 1911.

dingung, daß seine rechtwinkligen Komponenten der Wellengleichung zu genügen haben. Aus ihm leitet man durch einmalige bzw. zweimalige Anwendung der Operation „rot“ die elektrische bzw. magnetische Feldstärke her. Wir werden uns daher im folgenden mit der Wellengleichung befassen. Diese wollen wir nicht allgemein integrieren, sondern nur Lösungen suchen, die zeitlich periodisch sind. Diese Lösungen lassen sich darstellen als Produkte von zwei Faktoren, von denen der eine Faktor eine Funktion nur der Raumkoordinaten ist; der andere Faktor ist $e^{i\nu t}$. Die Funktion der Raumkoordinaten muß dann, wie man leicht sieht, der Differentialgleichung

$$\Delta V + \frac{\nu^2}{c^2} V = 0$$

der sogenannten Schwingungsgleichung, genügen. Es sollen Partikularlösungen dieser Differentialgleichung angegeben werden, die geeignet sind, die elektromagnetischen Grenzbedingungen auf einem Ellipsoid zu erfüllen.

I. Teil

Die Integration der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten

§ 1. Einführung der elliptischen Koordinaten

Unter elliptischen Koordinaten verstehen wir die drei Wurzeln der folgenden Gleichung dritten Grades in ϱ^2 :

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - p^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - q^2} - 1 = 0; \quad 0 < p < q$$

oder

$$x^2(\varrho^2 - p^2)(\varrho^2 - q^2) + y^2\varrho^2(\varrho^2 - q^2) + z^2\varrho^2(\varrho^2 - p^2) - \varrho^2(\varrho^2 - p^2)(\varrho^2 - q^2) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird ϱ^2 als eine Funktion der drei räumlichen Koordinaten x, y, z dargestellt und zwar ist, den drei Wurzeln entsprechend, ϱ^2 eine dreiwertige Funktion der Raumkoordinaten. Der Wert jeder Wurzel, oder wie wir auch sagen wollen, jeder der drei Zweige dieser Funktion, liegt zwischen genau angebbaren Grenzen. Einer der drei Zweige liegt zwischen Null und p^2 , wir bezeichnen diesen mit ν^2 . Der zweite Zweig, den wir mit μ^2 bezeichnen wollen, liegt zwischen p^2 und q^2 ; der dritte Zweig schließlich ist immer

größer als q^2 und hat keine obere Grenze. Diesen nennen wir λ^2 .

Die Darstellung der kartesischen Koordinaten durch die drei Zweige λ , μ , ν wollen wir hier nur angeben, da die Ableitung derselben bekannt sein dürfte.¹⁾ Es ergibt sich:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \nu}{p \cdot q}; \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)(\mu^2 - p^2)(\nu^2 - p^2)}}{p \sqrt{q^2 - p^2}}; \\ z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - q^2)(q^2 - \mu^2)(q^2 - \nu^2)}}{q \sqrt{q^2 - p^2}}. \end{array} \right.$$

Es sei nun ein Ellipsoid mit den Halbachsen l , m , n gegeben. In seinem Mittelpunkt befinde sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen X -Achse mit der Richtung der Halbachse l , dessen Y -Achse mit der Halbachse m und dessen Z -Achse mit der Halbachse n des Ellipsoides zusammenfällt. Der Polabstand ϑ sei der Winkel zwischen einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und der X -Achse. Zur Festlegung der Richtung einer Geraden durch den Nullpunkt bedienen wir uns dann noch des in der Y - Z -Ebene befindlichen Azimutes φ . Ein Punkt auf dem Ellipsoid hat die rechtwinkligen Koordinaten²⁾

$$x = l \cos \vartheta; \quad y = m \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = n \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Da nun andererseits nach den Gleichungen (1) bzw. nach der Definitionsgleichung der elliptischen Koordinaten ein Punkt mit den Koordinaten x , y , z auf einem Ellipsoid mit den Halbachsen

$$\lambda; \quad \sqrt{\lambda^2 - p^2}; \quad \sqrt{\lambda^2 - q^2}$$

1) Vgl. z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I. S. 352. Berlin 1878.

2) Diese Winkelkoordinaten ϑ und φ haben allerdings nicht mehr die einfache geometrische Bedeutung wie die gewöhnlichen Winkelpolarkoordinaten. Sie sind nicht mehr die Richtungswinkel derjenigen Geraden, die durch den Nullpunkt und den fraglichen Punkt hindurchgeht. Ihre Bedeutung ist vielmehr die folgende: Durch den Punkt auf dem Ellipsoid und die zu den konfokalen Ellipsoiden gehörigen beiden orthogonalen Hyperboloidenscharen ist ein Hyperbelast bestimmt, der das betrachtete Ellipsoid in dem betrachteten Punkte senkrecht durchschneidet. Die Richtungswinkel des einen Asymptotenstrahles sind gerade die Größen ϑ und φ .

liegt, so erhalten wir aus (1) folgende Gleichungen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{\mu \nu}{p \cdot q}; \quad \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{\sqrt{(\mu^2 - p^2)(p^2 - \nu^2)}}{p \sqrt{q^2 - p^2}}; \\ \sin \vartheta \sin \varphi &= \frac{\sqrt{(q^2 - \mu^2)(q^2 - \nu^2)}}{q \sqrt{q^2 - p^2}}. \end{aligned} \right.$$

Die elliptischen Koordinaten haben die Eigenschaft der Orthogonalität. Dies zeigen wir durch die Berechnung des Bogenelementes, dessen Quadrat sich als rein quadratische Form ergeben wird. Zu diesem Zweck differenzieren wir die Gleichungen (1) logarithmisch und erhalten:

$$\begin{aligned} dx &= x \left\{ \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\nu}{\nu} \right\} \\ dy &= y \left\{ \frac{d\lambda \cdot \lambda}{\lambda^2 - p^2} + \frac{d\mu \cdot \mu}{\mu^2 - p^2} + \frac{d\nu \cdot \nu}{p^2 - \nu^2} \right\} \\ dz &= z \left\{ \frac{d\lambda \cdot \lambda}{\lambda^2 - q^2} + \frac{d\mu \cdot \mu}{q^2 - \mu^2} + \frac{d\nu \cdot \nu}{q^2 - \nu^2} \right\}. \end{aligned}$$

Hier quadrieren wir und addieren dann. So erhalten wir als Quadrat des Bogenelementes ds :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - p^2)(\lambda^2 - q^2)} d\lambda^2 + \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \lambda^2)}{(\mu^2 - p^2)(\mu^2 - q^2)} d\mu^2 \\ &\quad + \frac{(\nu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(\nu^2 - p^2)(\nu^2 - q^2)} d\nu^2. \end{aligned} \right.$$

Denn die Koeffizienten der doppelten Produkte

$$d\lambda \cdot d\mu; \quad d\lambda \cdot d\nu; \quad d\mu \cdot d\nu$$

verschwinden identisch, wie man leicht nachrechnet.

Von den Koordinaten λ, μ, ν können wir nun zu anderen elliptischen Orthogonalkoordinaten übergehen. Zum Beispiel können wir solche durch folgende Gleichungen definieren:

$$\alpha = \varphi_1(\lambda); \quad \beta = \varphi_2(\mu); \quad \gamma = \varphi_3(\nu).$$

Diese Koordinaten müssen ebenfalls als elliptische angesprochen werden, denn aus $\alpha = \text{const}$ folgt $\lambda = \text{const}$ usw. Also auch $\alpha = \text{const}$ stellt im Raume der x, y, z Ellipsoide dar, ebenso $\beta = \text{const}$ und $\gamma = \text{const}$ ein- bzw. zweischalige Hyperboloide.

Wir verfügen nun über die Funktion φ_1 , indem wir bestimmen: φ_1 sei das elektrostatische Potential, das von einem der Ellipsoide $\lambda = \lambda_0$ hervorgebracht würde, wenn dies eine

elektrostatische Ladung hätte. Ein solches Potential ist durch ein elliptisches Integral erster Gattung dargestellt, nämlich¹⁾:

$$\varphi_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)(\lambda^2 - q^2)}}.$$

Indem wir über einen willkürlichen Faktor und durch Festlegung einer der Grenzen des Integrales über eine an sich unwesentliche additive Konstante verfügen, führen wir an Stelle von λ eine neue Variable α durch folgende Gleichung ein:

$$(4) \quad \alpha = - \int_1^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(\sigma^2 - k'^2)}} \quad \sigma = \frac{\lambda}{q}; \quad k' = \frac{p}{q}.$$

Suchen wir die zu α inverse Funktion, d. h. versuchen wir λ/q durch α auszudrücken, so werden wir bei der von uns getroffenen Wahl der unteren Grenze des Integrales (4) auf die Jakobische Funktion $dn(\alpha, k)$ geführt, die außer von α noch von dem Parameter $k = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$, dem sogenannten Modul der elliptischen Funktion, abhängt. Die elliptischen Funktionen $sn(\alpha, k)$ und $cn(\alpha, k)$, die im folgenden auch gebraucht werden, hängen mit der eben eingeführten $dn(\alpha, k)$ durch folgende Gleichungen zusammen:

$$(4a) \quad sn(\alpha, k) = \frac{1}{k} \sqrt{1 - dn^2(\alpha, k)}; \quad cn(\alpha, k) = \frac{1}{k} \sqrt{dn^2(\alpha, k) - k'^2},$$

k' nennen wir den komplementären Modul.

In derselben Weise wie λ und α miteinander verknüpft sind, sollen auch die neu einzuführenden β und γ mit bzw. μ und ν zusammenhängen. Wir erhalten:

$$(5) \quad \lambda = q \, dn(\alpha, k); \quad \mu = q \, dn(\beta, k); \quad \nu = q \, dn(\gamma, k).$$

Für spätere Entwicklungen ist es vorteilhaft, anzumerken, daß die durch (4) definierte Größe α als Funktion der kartesischen Koordinaten x, y, z der Laplaceschen Differentialgleichung genügt:

$$(6) \quad \Delta \alpha = \Delta \beta = \Delta \gamma = 0.$$

Die Gleichungen (5), durch die λ, μ, ν einerseits mit den Größen α, β, γ andererseits verbunden werden, reichen zur

1) Vgl. z. B. M. Planck, Einf. in die Theorie der El. und des Magn. S. 56. Leipzig 1922. Doch beachte man, daß wir λ^2 nannten, was bei Planck $a^2 + \lambda$ ist. Ebenso entsprechen unsere p, q den Planckschen Größen $a^2 - b^2$ bzw. $a^2 - c^2$.

eindeutigen Bestimmung noch nicht aus; denn wir hatten gezeigt, daß die Größen λ , μ , ν gemäß ihrer Definition nicht beliebiger Werte fähig sind, sondern auf bestimmte Intervalle beschränkt werden mußten. Dies hat zur Folge, daß auch die Größen α , β , γ gewissen Beschränkungen unterworfen sind, die sich aus denen für λ , μ , ν eindeutig ermitteln lassen müssen. Betrachten wir z. B. die Größe μ ; diese war auf ein reelles Intervall beschränkt, dessen obere Schranke q , dessen untere Schranke p ist. Setzen wir nun in Gleichung (5) $\beta = 0$, so nimmt $dn(0)$ den Wert 1 an, und wir erhalten die Gleichung $\mu = q$. Da q die obere Schranke für μ ist, so haben wir in $\beta = 0$ sicher eine Schranke für die Variable β gefunden. Setzen wir andererseits $\beta = -K$, wo K die reelle Viertelperiode der Jakobischen Funktionen darstellt, so ergibt sich die Gleichung:

$$dn(-K) = k' = p/q$$

und daraus der Wert p für die Größe μ . Wir haben also als untere Grenze für die Variable β den Wert $-K$, als obere Grenze den Wert 0 gefunden. Weiter ist die Funktion $dn(u)$ für reelle Werte von u reell und im Intervall

$$-K < u < 0$$

monoton wachsend; daraus folgt, daß das Intervall für die Variable β die reelle Achse zwischen $-K$ und 0 ist.

$-K$ ist offenbar auch eine Schranke für die Koordinate γ . Denn γ korrespondiert der Koordinate ν , und das Maximum von ν ist gerade der Wert p . Gehen wir nun auf der reellen Achse von $-K$ aus nach $-2K$, so nimmt $dn(u)$ für eine solche Veränderung seines Argumentes dauernd zu, bis es für $u = -2K$ den Wert 1 wieder erreicht hat. Aus den periodischen Eigenschaften der Funktion $dn(u)$ erkennt man, daß $dn(u)$ für reelle Werte seines Argumentes nur Werte zwischen k' und 1 annehmen kann. Sollen daher die Gleichungen (5) richtig sein, so müssen wir für die Koordinate γ komplexe Werte zulassen. Dabei werden wir das Gebiet der Variablen γ aber so abgrenzen, daß der Wert von $dn(u)$ reell bleibt.

Die einzigen Werte von u , für die die Funktion $dn(u)$ verschwindet, sind die Werte $u = (2m+1)K + i(2n+1)K'$, wo m und n ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und iK' die imaginäre Viertelperiode der Jakobischen Funk-

tionen ist. i ist die imaginäre Einheit. Unter den Punkten von u , die $dn(u)$ zum Verschwinden bringen, müssen wir nun denjenigen aussuchen, der so mit dem Punkte $u = -K$ verbunden werden kann, daß längs einer bestimmten Kurve, die die beiden Punkte verbindet, $dn(u)$ erstens nur reelle Werte und zweitens, Werte zwischen 0 und k' einmal und nur einmal annimmt. Man sieht leicht mit Hilfe der Additionstheoreme der Jakobischen Funktionen und mit Hilfe der imaginären Transformationen von Jakobi¹⁾, daß der einzige Punkt, der allen beiden Bedingungen genügt, der Punkt $-K \pm iK'$ ist, daß ferner die Kurve, längs deren $dn(u)$ reell ist, durch diejenige Gerade dargestellt ist, die durch die beiden Punkte $-K$ und $-K \pm iK'$ hindurchgeht. Für γ finden wir also als Intervall das Stück einer Geraden parallel zur imaginären Achse, das durch die Punkte $-K$ und $-K \pm iK'$ begrenzt wird. Durch genau die gleiche Überlegung finden wir für α als Intervall das Stück der imaginären Achse, das zwischen 0 und iK' liegt.

Wir werden nun auch die Gleichungen (1) und (2) auf die elliptischen Koordinaten α, β, γ umrechnen, wobei wir eine bemerkenswert symmetrische Form erhalten werden. Mit Benutzung der Gleichungen (4a) ergibt sich leicht:

$$(7) \begin{cases} x = \frac{q}{k'} dn \alpha dn \beta dn \gamma; & y = q \frac{ik^2}{k'} cn \alpha cn \beta cn \gamma; \\ & z = iq k^2 sn \alpha sn \beta sn \gamma, \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{1}{k'} dn \beta dn \gamma; & \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{ik}{k'} cn \beta cn \gamma; \\ & \sin \vartheta \sin \varphi = k sn \beta sn \gamma. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) legen eine Erweiterung derjenigen Intervalle nahe, die wir für die Variablen β, γ gefunden haben. Denn bei der eben eingeführten Beschränkung sind die Größen $dn \beta dn \gamma$; $cn \beta cn \gamma$; $sn \beta sn \gamma$ entweder nur positiv oder nur negativ. Da aber der Polabstand ϑ zwischen 0 und π , das Azimut φ zwischen 0 und 2π variiert, so werden auf den linken Seiten von (8) Vorzeichenwechsel auftreten, die durch Veränderungen der β und γ innerhalb der gesetzten Grenzen nicht reproduziert werden könnten.

1) Vgl. z. B.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course of modern Analysis, S. 491 ff. Cambridge 1920.

Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{1}{k'} dn \beta dn \gamma.$$

Setzen wir hier $\beta = 0$, $\gamma = -K$, so erhalten wir wegen $dn(-K) = k'$, $dn(0) = 1$, $\cos \vartheta = 1$; also entspricht dem Werte $\vartheta = 0$ das Wertepaar $\beta = 0$, $\gamma = -K$. Es ist leicht zu sehen, daß beim Festhalten an den vorhin eingeführten Intervallbegrenzungen das Produkt $dn \beta dn \gamma$ immer kleiner als k' ist und nur dann verschwindet, wenn $\gamma = -K + iK'$ ist, da $dn \beta$ nicht verschwinden kann. Es entspricht daher dem Wert $\gamma = -K + iK'$ in eindeutiger Weise der Wert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Um nun auch negative Werte darstellen zu können, erweitern wir das Intervall für γ über $-K + iK'$ hinaus bis zu $-K + 2iK'$. Dann müssen wir allerdings das Intervall für β so erweitern, daß in ihm $dn(\beta)$ nie negativ wird. $dn(u)$ ist nun nie negativ, sondern liegt immer zwischen 1 und k' , wenn u reell ist. Wir dürfen daher das Intervall für β nur längs der reellen Achse erweitern und haben zu prüfen, ob diese Beschränkung gestattet, auch $\sin \vartheta \cos \varphi$ und $\sin \vartheta \sin \varphi$ vollständig durch β und γ darzustellen.

Die Größen $\sin \vartheta \cos \varphi$ und $\sin \vartheta \sin \varphi$ verschwinden beide für $\vartheta = 0, \pi$. $\vartheta = 0$ entsprach aber dem Wertepaar $\beta = 0$, $\gamma = -K$, und für dieses Wertepaar verschwinden in der Tat $icn \beta cn \gamma$ und $sn \beta sn \gamma$. Dem Werte $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ entsprach der Wert $\gamma = -K + iK'$, so daß wir erhalten:

$$\cos \varphi = -cn \beta; \quad \sin \varphi = -sn \beta,$$

da

$$cn(-K + iK') = \frac{ik'}{k}, \quad sn(-K + iK') = -\frac{1}{k}$$

ist.

Gemäß den Gleichungen (4a) ist aber

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = sn^2 \beta + cn^2 \beta = 1,$$

wie es sein muß. Weiter sieht man, daß $icn \beta cn \gamma$ und $sn \beta sn \gamma$, wenn γ durch den Wert $-K + iK'$ hindurchgeht, ihr Zeichen nicht wechseln, da

$$cn(u - K + iK') = \frac{ik'}{ken u}; \quad dn(u - K + iK') = \frac{dn u}{ken u}$$

und

$$cn(u) = cn(-u); \quad dn(u) = dn(-u)$$

ist. Die in $icn \beta cn \gamma$ bzw. $sn \beta sn \gamma$ auftretenden Zeichenwechsel müssen also den Nullstellen von $\cos \varphi$ bzw. $\sin \varphi$ entsprechen.

Da nun die Nullstellen von $cn\beta$ an den Stellen $(2n+1)K$ liegen, (bei deren Überschreitung immer Zeichenwechsel eintritt), ferner die von $sn\beta$ an den Stellen $2nK$, so erhalten wir die notwendige Anzahl von Zeichenwechseln dann, wenn wir das Intervall von β wie folgt erweitern: $-K < \beta < 3K$. Wir erhalten also für γ ein Intervall der Länge einer halben imaginären Periode:

$$-K < \gamma < -K + 2iK',$$

für β die Länge einer ganzen reellen Periode:

$$-K < \beta < +3K.$$

Es bleibt nun noch übrig, das Quadrat des Bogenelements auf die Koordinaten α , β , γ umzurechnen. Aus Gleich. (4) folgt

$$q^2 d\lambda^2 = -d\alpha^2(\lambda^2 - p^2)(\lambda^2 - q^2).$$

Analoges für $d\mu^2$ und dv^2 . Unter Berücksichtigung von (3) erhalten wir:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = & -q^2 \{ (dn^2\alpha - dn^2\beta)(dn^2\alpha - dn^2\gamma)d\alpha^2 \\ & + (dn^2\beta - dn^2\gamma)(dn^2\beta - dn^2\alpha)d\beta^2 \\ & + (dn^2\gamma - dn^2\alpha)(dn^2\gamma - dn^2\beta)d\gamma^2 \}. \end{aligned} \right.$$

Es muß hier zunächst verwunderlich erscheinen, daß das Quadrat des Bogenelementes nicht, wie zu erwarten, positiv, sondern negativ definit ist. Der Grund hierfür ist der folgende: Die Größen α und γ ändern sich längs Parallelen zur imaginären Achse der α - bzw. γ -Ebene. Daher sind $d\alpha$ und $d\gamma$ rein imaginäre Größen, deren Quadrate natürlich negativ sind, und die so die Kompensation des Minuszeichens bewirken. $d\beta$ ist reell, jedoch ist der Koeffizient von $d\beta^2$ negativ, weil nach Voraussetzung $dn^2\alpha > dn^2\beta$ ist. Daher ist der Wert von ds^2 immer positiv, wie es auch sein muß.

Wir hätten durch imaginäre Transformationen die Möglichkeit, zu reellen Koordinaten überzugehen, so daß sich in diesen auch die quadratische Form des Bogenelementes als positiv definite Form schreiben läßt. Diesen kleinen Vorteil würden wir jedoch durch den Verlust der bemerkenswerten Symmetrie in den Formeln (7) und (8) erkaufen, eine Symmetrie, die uns erst in einem der folgenden Paragraphen von großem Nutzen sein wird. Wir haben es daher vorgezogen, zunächst die Größen α , β , γ in der hier eingeführten Form beizubehalten.

§ 2. Die Differentialgleichung $\Delta V + x^2 V = 0$
in elliptischen Koordinaten

Wir finden durch Differentiation:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + 2 \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \gamma} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial \gamma} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Bilden wir dieselben Ausdrücke für die Differentiation nach y und z , so finden wir, daß der Ausdruck ΔV 1. die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial \beta}$, $\frac{\partial V}{\partial \gamma}$ nicht enthält; denn deren Koeffizienten sind bzw. $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, $\Delta \gamma$, die gemäß Gleichung (6) verschwinden; 2. die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \gamma}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial \gamma}$ fallen heraus wegen der Orthogonalität der α , β , γ ; 3. die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2}$ sind bzw.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)^2; \quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2; \\ &\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)^2.\end{aligned}$$

Wir erinnern nun daran, daß wir die Größen α , β , γ als Potentiale eingeführt haben. In dieser Terminologie fortfahrend können wir sagen, daß die Differentialquotienten, die in den Koeffizienten von $\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2}$ auftreten, nämlich

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \dots \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

die rechtwinkligen Komponenten des Gradienten von bzw. α , β , γ sind, und so können wir sagen, daß die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2}$ nichts anderes sind als die Quadrate der absoluten Beträge dieser Gradienten. Nun läßt sich aber der absolute Betrag eines Gradienten sehr leicht durch einen Differentialquotienten ausdrücken; bezeichnet nämlich s_n die Richtung der stärksten Änderung eines Potentials φ , so ist

$$|\text{grad } \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial s_n}.$$

Fragen wir nun in unserem Falle, durch welche Eigenschaft die Richtung des stärksten Abfalls von z. B. α gekennzeichnet ist, so sehen wir sofort, daß in dieser Richtung sich die beiden anderen Koordinaten nicht ändern; es ist also längs s_n :

$$\frac{\partial \beta}{\partial s_n} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_n} = 0.$$

Das Quadrat des Bogenelements in der Richtung s_n ist also nach Gleichung (9), da $d\beta = d\gamma = 0$ sind, gegeben durch:

$$ds_n^2 = -d\alpha^2 \cdot q^2 \cdot (dn^2 \alpha - dn^2 \beta)(dn^2 \alpha - dn^2 \gamma).$$

Und daraus dann:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = -\frac{1}{q^2(dn^2 \alpha - dn^2 \beta)(dn^2 \alpha - dn^2 \gamma)}.$$

Analoges für β und γ .

Nunmehr bereitet es keine Schwierigkeiten, die Differentialgleichung $\Delta V + \kappa^2 V = 0$ auf elliptische Koordinaten umzurechnen; indem wir aus dem Ausdruck für ΔV den Faktor

$$-\frac{1}{q^2(dn^2 \alpha - dn^2 \beta)(dn^2 \alpha - dn^2 \gamma)(dn^2 \beta - dn^2 \gamma)}$$

herausziehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{q^2(dn^2 \alpha - dn^2 \beta)(dn^2 \alpha - dn^2 \gamma)(dn^2 \beta - dn^2 \gamma)} \\ & \cdot \left\{ (dn^2 \beta - dn^2 \gamma) \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + (dn^2 \gamma - dn^2 \alpha) \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \right. \\ & \quad \left. + (dn^2 \alpha - dn^2 \beta) \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \right\} + \kappa^2 V = 0 \end{aligned}$$

oder, indem wir mit diesem Faktor herauf multiplizieren

$$(10) \quad \begin{cases} (dn^2 \beta - dn^2 \gamma) \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + (dn^2 \gamma - dn^2 \alpha) \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \\ \quad + (dn^2 \alpha - dn^2 \beta) \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \\ = \omega^2 (dn^2 \alpha - dn^2 \beta)(dn^2 \alpha - dn^2 \gamma)(dn^2 \beta - dn^2 \gamma) V, \end{cases}$$

wo wir $\kappa \cdot q = \omega$ gesetzt haben.

§ 3. Die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die aus Gleichung (10) resultieren

Wir suchen jetzt Lösungen der Differentialgleichung (10), die sich als Produkte von drei Funktionen darstellen lassen, derart, daß die eine Funktion nur von α , die zweite nur von β und die dritte nur von γ abhängt. Sei $A \cdot B \cdot C$ ein solches

Produkt, wo A Funktion von α , B von β und C von γ allein ist; ferner genüge $A \cdot B \cdot C$ als Funktion von α , β und γ der Differentialgleichung (10). Setzen wir jetzt β und γ konstant, so erhalten wir für A folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = (m_1 dn^4 \alpha + E_1 dn^2 \alpha + H_1) \cdot A$$

m_1, E_1, H_1 Konstante.

Entsprechend für B und C :

$$\frac{d^2 B}{d\beta^2} = (m_2 dn^4 \beta + E_2 dn^2 \beta + H_2) \cdot B,$$

$$\frac{d^2 C}{d\gamma^2} = (m_3 dn^4 \gamma + E_3 dn^2 \gamma + H_3) \cdot C.$$

Wir multiplizieren die erste Differentialgleichung mit $(dn^2 \beta - dn^2 \gamma) B \cdot C$, die zweite mit $(dn^2 \gamma - dn^2 \alpha) A \cdot C$, die dritte mit $(dn^2 \alpha - dn^2 \beta) A \cdot B$; dann addieren wir. So erhalten wir auf der linken Seite, wenn wir noch $A \cdot B \cdot C$ mit V bezeichnen:

$$(dn^2 \beta - dn^2 \gamma) \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^2} + (dn^2 \gamma - dn^2 \alpha) \frac{\partial^3 V}{\partial \beta^2} + (dn^2 \alpha - dn^2 \beta) \frac{\partial^3 V}{\partial \gamma^2}$$

also gerade die linke Seite der Gleichung (10). Auf der rechten Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned} & m_1 dn^4 \alpha (dn^2 \beta - dn^2 \gamma) + m_2 dn^4 \beta (dn^2 \gamma - dn^2 \alpha) \\ & + m_3 dn^4 \gamma (dn^2 \alpha - dn^2 \beta) + dn^3 \alpha dn^2 \beta (E_1 - E_2) \\ & + dn^2 \alpha dn^2 \gamma (E_3 - E_1) + dn^2 \beta dn^2 \gamma (E_2 - E_3) \\ & + dn^2 \beta (H_1 - H_3) + dn^2 \gamma (H_2 - H_1) + dn^2 \alpha (H_3 - H_2). \end{aligned}$$

Soll das System der drei Differentialgleichungen mit (10) äquivalent sein, so müssen auch die rechten Seiten übereinstimmen, d. h. es müssen die mit E_i und H_i multiplizierten Größen herausfallen. Dies geschieht dann und immer nur, wenn

$$E_1 = E_2 = E_3 = E; \quad H_1 = H_2 = H_3 = H$$

ist, wo E und H zwei zunächst willkürliche Konstante bedeuten. Rechts bleiben nur die Größen übrig, die mit bzw. m_1, m_2, m_3 multipliziert sind, und diese stimmen dann und nur dann mit der rechten Seite von (10) überein, wenn wir setzen

$$m_1 = m_2 = m_3 = \omega^2.$$

Wir haben also ein Integral der Schwingungsgleichung durch eine einzige Funktion eines Argumentes $f_1(x)$ in folgender Weise dargestellt:

$$f_1(\alpha) \cdot f_1(\beta) \cdot f_1(\gamma).$$

Der Unterschied im Verhalten der Funktionen wird durch die verschiedenen Intervalle der α , β , γ gewährleistet.

Den weiteren Untersuchungen haben wir also die Differentialgleichung

$$(11) \quad \frac{d^2 f}{d\psi^2} - (\omega^2 dn^4 \psi + E dn^2 \psi + H) f = 0$$

zugrunde zu legen.

Die Differentialgleichung (11) enthält zwei Parameter E und H . Diese bestimmen wir so, daß die Integrale der Differentialgleichung (11) periodische Funktionen der Variablen ψ werden.

Setzen wir ω gleich Null, so geht (11) in die Differentialgleichung der Funktionen von Lamé über. Die Forderung periodischer Integrale der Differentialgleichung läßt sich dann nur erfüllen, wenn $E = -n(n+1)$ (n ganze positive Zahl)¹⁾ und $H = n(n+1)$ die Wurzel einer bestimmten algebraischen Gleichung vom Grade $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ wird.

Sei $f(\psi)$ eine Lösung der Differentialgleichung (11) und $F(\beta, \gamma) = f(\beta) \cdot f(\gamma)$, so ersieht man sofort, daß $F(\beta, \gamma)$ folgender partiellen Differentialgleichung genügt:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} - [\omega^2 (dn^4 \beta - dn^4 \gamma) + E (dn^2 \beta - dn^2 \gamma)] F = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat den großen Vorteil, nur noch eine Konstante, nämlich E , zu enthalten, während die Konstante H sich bei der Differenzbildung herausgehoben hat.

Die Größen β und γ sind durch die Gleichungen (8) mit dem Polabstand ϑ und dem Azimut φ verknüpft. Die Funktion F kann daher auch als eine Funktion von ϑ und φ angesehen werden, und wir wollen ermitteln, welcher Differentialgleichung sie als Funktion von ϑ und φ zu genügen hat. Es ist also unsere Aufgabe, die Differentialgleichung (12) mit Hilfe der Gleichungen (8) umzurechnen. Hier sind die Umrechnungs-gleichungen:

1) Nach Whittaker, Watson, a. a. O. S. 564 lautet die Lamé'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 sn^2 \alpha + A\} A$$

was, wegen $k^2 sn^2 \alpha = 1 - dn^2 \alpha$, mit unserer Behauptung übereinstimmt.

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \beta^3} = \frac{\partial^3 F}{\partial \vartheta^3} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^3 + \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^3 + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \beta^3} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta \partial \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}.$$

Analoges für $\frac{\partial^3 F}{\partial \gamma^3}$.

Aus der ersten der Gleichungen (8) folgern wir:

$$\sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = \frac{k^2}{k'} sn \beta cn \beta dn \gamma$$

und daher:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = \frac{k^2}{k'} \frac{1}{\sin \vartheta} sn \beta cn \beta dn \gamma; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} = \frac{k^2}{k'} \frac{1}{\sin \vartheta} sn \gamma cn \gamma dn \beta.$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (8) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \varphi = -ik' \frac{sn \beta sn \gamma}{cn \beta cn \gamma}; \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -ik' \frac{sn \gamma}{cn \gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{sn \beta}{cn \beta} \right),$$

daraus dann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -ik' \cos^2 \varphi \frac{sn \gamma}{cn \gamma} \frac{dn \beta (sn^2 \beta + cn^2 \beta)}{cn^2 \beta} \\ = \frac{ik^2}{k'} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} sn \gamma cn \gamma dn \beta$$

oder:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{i}{\sin \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \frac{i}{\sin \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir sofort, daß

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0$$

ist und daß somit der gemischte Differentialquotient $\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta \partial \varphi}$ nicht auftritt. Aus denselben Gleichungen schließen wir auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = \frac{i}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \gamma \partial \beta} - \frac{i \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2}.$$

Daher wird auch der Differentialquotient $\partial F / \partial \varphi$ nicht auftreten. Endlich können wir noch den Schluß ziehen, daß

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2 \right]$$

ist. Aus

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} = -i \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} = -i \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$

folgt ferner

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \beta^2} = -i \sin \vartheta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} + \cot \vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \gamma^2} = -i \sin \vartheta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} + \cot \vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2$$

oder

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \gamma^2} = \cot \vartheta \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2 \right]$$

und damit haben wir gezeigt, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2}$$

übergeht in

$$\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right].$$

Man berechnet weiter leicht den Ausdruck $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2$ und findet für ihn:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} \right)^2 = dn^2 \beta - dn^2 \gamma.$$

Schließlich ergibt sich noch aus (8)

$$dn^2 \beta + dn^2 \gamma = \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + k'^2.$$

Damit haben wir auch das gesuchte Ergebnis gefunden: Die Funktion F , die in ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten β und γ der Differentialgleichung (12) genügt, muß als Funktion von ϑ und φ ein Integral folgender Differentialgleichung sein:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ &- [\omega^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + E] \cdot F = 0, \end{aligned} \right.$$

wo wir E für $E + \omega^2 k'^2$ gesetzt haben.

Für E fügen wir folgende Bedingung hinzu: Es sei E so bestimmt, daß die Integrale von (13) auf einer Kugelfläche endlich, eindeutig und stetig sind. Für $\omega = 0$ würde daraus folgen:

$$E = -n(n+1).$$

Denn für $\omega = 0$ geht die Differentialgleichung (13) in die bekannte Differentialgleichung der Kugelflächenfunktionen über, und es ist bekannt, daß nur dann Integrale dieser Differentialgleichung mit den geforderten Eigenschaften vorhanden sind, wenn wir die Größe E in der eben genannten Weise wählen.

§ 4. Das allgemeine Integral der Wellengleichung
und eine daraus folgende Integralgleichung für die Integrale
der Differentialgleichung (13)

Häufig wird in der Wellenoptik ein allgemeines Integral der Wellengleichung gebraucht, daß wir in folgender Form für unsere Zwecke benutzen wollen¹⁾:

$$(14) \left\{ w = \int_{\vartheta_0=0}^{\pi} \int_{\varphi_0=-\pi}^{\pi} \Phi(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 + ct) \cdot Y(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0. \right.$$

Sucht man das allgemeine Integral der Wellengleichung für zeitlich periodische Zustände, bzw. das allgemeine Integral der Schwingungsgleichung $\Delta V + \kappa^2 V = 0$, so findet man leicht aus (14):

$$(15) V = \int_{\vartheta_0=0}^{\pi} \int_{\varphi_0=-\pi}^{\pi} e^{i\kappa(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} Y(\vartheta_0; \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Bezeichne nun f eine Lösung der Differentialgleichung (11), dann ist $F = f(\beta) \cdot f(\gamma)$ ein Integral von (12), bzw. als Funktion der Koordinaten ϑ und φ ein Integral von (13). Als solches werde die Funktion mit $F(\vartheta, \varphi)$ bezeichnet. Es ist dann sicher $f(\alpha) \cdot F(\vartheta, \varphi)$ ein Integral der Differentialgleichung $\Delta V + \kappa^2 V = 0$, und wir können daher erwarten, daß sich $f(\alpha)F(\vartheta, \varphi)$ in der Form

$$(16) f(\alpha) F(\vartheta, \varphi) = \int_{\vartheta_0=0}^{\pi} \int_{\varphi_0=-\pi}^{\pi} e^{i\kappa(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} \cdot Y(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0$$

darstellen läßt. Nach den Gleichungen (7) und (8) rechnen wir jetzt das Integral auf die Koordinaten $\alpha, \vartheta, \varphi$ um und finden:

$$16a) \left\{ \begin{aligned} & f(\alpha) F(\vartheta, \varphi) \\ & = \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\kappa(d n \alpha \cos \vartheta \cos \varphi_0 + k c n \alpha \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + i k n \alpha \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} \cdot Y(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned} \right.$$

wo wiederum $\kappa \cdot q$ gleich ω gesetzt ist. Die zunächst willkürliche Funktion $Y(\vartheta_0, \varphi_0)$ setzen wir gleich $\sin \vartheta_0 H(\vartheta_0, \varphi_0)$, wo $H(\vartheta_0, \varphi_0)$ ebenfalls eine zunächst willkürliche Funktion be-

1) E. T. Whittaker, Math. Ann. 57. S. 342. 1902 oder J. Picht, Ann. d. Phys. 77. S. 685. 1925.

deutet. Schließlich setzen wir α einer willkürlichen Konstanten gleich, z. B. $\alpha = 0$. Es ist nun:

$$dn\,0 = 1, \quad cn\,0 = 1, \quad sn\,0 = 0.$$

So erhalten wir für $F(\vartheta, \varphi)$ eine Integraldarstellung folgender Form:

$$(17) \quad F(\vartheta, \varphi) = c \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} \cdot H(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \, d\varphi_0.$$

Jetzt soll die willkürliche Funktion $H(\vartheta_0, \varphi_0)$ so bestimmt werden, daß die durch das Integral (17) dargestellte Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ der Differentialgleichung (13) genügt. Dabei wollen wir fordern, daß $H(\vartheta_0, \varphi_0)$ auf einer Kugeloberfläche (also für $0 < \vartheta_0 < \pi$, $-\pi < \varphi_0 < \pi$) endlich, eindeutig und stetig ist. Wir sehen sofort, daß diese Annahme hinreicht, damit auch die durch (17) dargestellte Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ denselben Bedingungen genügt. Wenn dann noch die durch (17) dargestellte Funktion die Differentialgleichung (13) befriedigt, so haben wir sicher damit den ersten Schritt zur Integration der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten getan.

Um die Bestimmung der Funktion $H(\vartheta_0, \varphi_0)$ durchzuführen zu können, beweisen wir einen Satz, der sich folgendermaßen formulieren läßt:

Bezeichne der Operator $D_{\vartheta, \varphi}$ die Operation

$$D_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \omega^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi),$$

so genügt die in (17) auftretende Funktion

$$e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} = e^{i\omega \varrho}$$

als Funktion der Variablen $\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0$ der Differentialgleichung

$$D_{\vartheta, \varphi} (e^{i\omega \varrho}) = D_{\vartheta_0, \varphi_0} (e^{i\omega \varrho})$$

wo $D_{\vartheta_0, \varphi_0}$ diejenige Operation bedeutet, die aus $D_{\vartheta, \varphi}$ hervorgeht, wenn man ϑ durch ϑ_0 und φ durch φ_0 ersetzt.

Wir führen den Beweis dieses Satzes durch Ausrechnen etwas allgemeiner, indem wir zeigen, daß die Funktion

$$e^{i\omega(a \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + b \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + c \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)}$$

immer der Differentialgleichung $D_{\vartheta, \varphi}(f) = D_{\vartheta_0, \varphi_0}(f)$ genügt, wenn wir die Größen a, b, c der Nebenbedingung

$$a^2 - c^2 = 1; \quad b^2 - c^2 = k^2$$

unterwerfen.

Es ist:

$$f = e^{i\omega e}, \quad \varrho = (a \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + b \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + c \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = i\omega e^{i\omega e} (-a \sin \vartheta \cos \vartheta_0 + b \cos \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + c \cos \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} = -\omega^2 e^{i\omega e} (-a \sin \vartheta \cos \vartheta_0 + b \cos \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + c \cos \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)^2 - i\omega \varrho e^{i\omega e},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = +i\omega e^{i\omega e} (-b \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \cos \varphi_0 + c \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \sin \varphi_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -\omega^2 e^{i\omega e} (-b \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \cos \varphi_0 + c \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \sin \varphi_0)^2 - i\omega (\varrho - a \cos \vartheta \cos \vartheta_0) e^{i\omega e}.$$

Daraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_0^2} &= -\omega^2 e^{i\omega e} \{a^2 [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \\ &\quad - [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \cdot [b^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 + c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi_0] \\ &\quad - 2bc [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \varphi_0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} - \cot \vartheta_0 \frac{\partial f}{\partial \vartheta_0} &= -i\omega e^{i\omega e} \left\{ b \frac{\cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0} [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \right. \\ &\quad \left. + c \frac{\sin \varphi \sin \varphi_0}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0} [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_0^2} &= -\omega^2 e^{i\omega e} \{b^2 [\sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi \\ &\quad - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi_0] + c^2 [\sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \\ &\quad - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi_0] \\ &\quad + 2bc \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0]\} \\ &\quad + i\omega e^{i\omega e} \left\{ b \frac{\cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0} [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \right. \\ &\quad \left. + c \frac{\sin \varphi \sin \varphi_0}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0} [\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_0] \right\}. \end{aligned}$$

Hier addieren wir und erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \\ & - \left[\frac{1}{\sin \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} \left(\sin \vartheta_0 \frac{\partial f}{\partial \vartheta_0} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_0^2} \right] \\ & = -\omega^2 e^{i\omega\varrho} \{ a^3 [\cos^2 \vartheta_0 - \cos^2 \vartheta] - b^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 \\ & \quad - b^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \\ & \quad + b^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi - c^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi_0 \\ & \quad - c^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 + c^2 \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi \\ & \quad + c^2 \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \} \\ & = -\omega^2 e^{i\omega\varrho} \{ a^2 [\cos^2 \vartheta_0 - \cos^2 \vartheta] + b^2 [\sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 \\ & \quad - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi] + c^2 [\sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi] \}, \end{aligned}$$

oder wegen der Nebenbedingungen, die a , b und c zu erfüllen haben:

$$(18) \quad D_{\vartheta\varphi} e^{i\omega\varrho} = D_{\vartheta_0\varphi_0} e^{i\omega\varrho}.$$

Mit Hilfe des Operators $D_{\vartheta\varphi}$ schreibt sich die Differentialgleichung (13), der die durch (17) dargestellte Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ genügen soll, in der Form:

$$D_{\vartheta\varphi} [F(\vartheta\varphi)] - E' F(\vartheta, \varphi) = 0.$$

Wegen (17) ist aber

$$\begin{aligned} D_{\vartheta\varphi} F(\vartheta\varphi) &= \text{const} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{\vartheta\varphi} [e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}] \\ & \quad \cdot H(\vartheta_0 \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned}$$

und wegen (18)

$$\begin{aligned} D_{\vartheta\varphi} F(\vartheta\varphi) &= \text{const} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{\vartheta_0\varphi_0} [e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}] \\ & \quad \cdot H(\vartheta_0 \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} \left(\sin \vartheta_0 \frac{\partial e^{i\omega\varrho}}{\partial \vartheta_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{\partial^2 e^{i\omega\varrho}}{\partial \vartheta_0^2} \right\} H(\vartheta_0 \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned}$$

Dies integrieren wir zweimal partiell nach ϑ_0 und zweimal partiell nach φ_0 . So erhalten wir:

$$\left\{ \sin \vartheta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial e^{i\omega\varrho}}{\partial \vartheta_0} H(\vartheta_0 \varphi_0) - \frac{\partial H}{\partial \vartheta_0} e^{i\omega\varrho} \right] d\varphi_0 \right\}_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=\pi} \\ + \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin \vartheta_0} \left[\frac{\partial e^{i\omega\varrho}}{\partial \varphi_0} H - \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} e^{i\omega\varrho} \right]_{\varphi_0=-\pi}^{\varphi_0=\pi} d\vartheta_0 \\ + \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\varrho} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} \left(\sin \vartheta_0 \frac{\partial H}{\partial \vartheta_0} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} \right\} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Das erste der beiden einfachen Integrale verschwindet, weil $\sin \vartheta_0$ für $\vartheta_0 = 0$ und π gleich Null ist, und nach Voraussetzung H für reelle Werte von φ_0 zwischen $-\pi$ und π endlich, eindeutig und stetig ist. Das zweite einfache Integral verschwindet, weil der in der inneren eckigen Klammer stehende Ausdruck in bezug auf φ_0 von der Periode 2π ist, und weil man die Differenz von zwei Funktionswerten zu bilden hat, deren Variable φ_0 den Unterschied 2π aufweist. Wir finden somit die bemerkenswerte Gleichung:

$$D_{\vartheta, \varphi} F(\vartheta, \varphi) = c \cdot \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ \cdot D_{\vartheta_0, \varphi_0} (H(\vartheta_0 \varphi_0)) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Daraus und aus Gleichung (17) folgt:

$$D_{\vartheta, \varphi} F(\vartheta, \varphi) - E' \cdot F(\vartheta, \varphi) \\ = c \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ \cdot \{ D_{\vartheta_0, \varphi_0} H(\vartheta_0 \varphi_0) - E' \cdot H(\vartheta_0 \varphi_0) \} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Soll nun

$$D_{\vartheta, \varphi} F(\vartheta, \varphi) - E' \cdot F(\vartheta, \varphi) = 0$$

sein, d. h. soll $F(\vartheta, \varphi)$ der Differentialgleichung (13) genügen, so ist offenbar dafür hinreichend, daß auch $H(\vartheta, \varphi)$ der Differentialgleichung (13) genügt. Da wir forderten, H soll auf einer Kugelfläche endlich, eindeutig und stetig sein, so erkennen wir, daß eine Lösung der Differentialgleichung (13), die den gestellten Bedingungen genügt, auch als Lösung folgender homogenen Integralgleichung gefunden werden kann:

$$(19) \quad \left\{ F(\vartheta, \varphi) = \lambda \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \right. \\ \left. \cdot F(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \right.$$

An die Stelle des in der Integralgleichung auftretenden Kernes

$$(20) \quad K_1(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0) = e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}$$

können, wie man sofort sieht, auch zwei andere Kerne gesetzt werden, nämlich

$$(20a) \quad \begin{cases} K_2(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0) = e^{-\omega (k' \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)} \\ K_3(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0) = e^{i\omega (k' \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + i k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)}, \end{cases}$$

denn man hat in der auf S. 627 auftretenden e -Funktion nur $a = 0$, d. h. $c = i b = i k'$ bzw. $b = 0$, d. h. $c = i k$ $a = k'$ zu setzen.

§ 5. Reihenentwicklungen für die Kerne

Die Weiterentwicklung der Theorie beruht auf einer Reihendarstellung der Kerne (20) und (20a), die nach Kugelflächenfunktionen fortschreitet. Um zu dieser zu gelangen, leiten wir kurz einen Satz über die Form spezieller Integrale der Schwingungsgleichung ab.

Wir suchen die Differentialgleichung $\Delta V + \kappa^2 V = 0$ dadurch zu integrieren, daß wir den Ansatz

$$V = R(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \Phi(x, y, z)$$

machen, wo die Funktion R die Variablen x, y, z nur in der Verbindung $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ enthält, und Φ der Laplaceschen Differentialgleichung genügen soll. Setzen wir

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so finden wir leicht, daß unter den gemachten Voraussetzungen $\Delta(R\Phi) + \kappa^2(R\Phi) = 0$ übergeht in

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \kappa^2 R \right) \\ + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hier erinnern wir uns daran, daß die einfachsten Integrale der Laplaceschen Differentialgleichung gewisse homogene Funktionen der drei Variablen x, y, z sind. Für homogene Funktionen vom Grade n der Variablen x, y, z gilt nach dem Eulerschen Satz:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = n \cdot F.$$

Nehmen wir also an, Φ sei eine homogene, harmonische Funktion vom Grade n , so muß die Funktion R folgender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{n+2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \kappa^2 R = 0.$$

Hier setzen wir nun:

$$R = \varrho^{-n-1/2} \cdot f(\varrho)$$

und finden dann für f die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{df}{d\varrho} + \left[\kappa^2 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right] f = 0.$$

Die Integrale dieser sind die Zylinderfunktionen der Ordnung $\pm \left(n + \frac{1}{2} \right)$ des Argumentes $\kappa \varrho$. Um die späteren Entwicklungen einfacher darstellen zu können, ist es vorteilhaft, gewisse Funktionen $\psi_n(w)$ durch folgende Gleichung zu definieren:

$$(21) \quad \psi_n(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} J_{n+1/2}(w).$$

Bezeichnet dann weiter $\Phi_n(x, y, z)$ eine harmonische, homogene Funktion vom Grade n , so ist sicher

$$V = \frac{\psi_n(\kappa \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^n} \Phi_n(x, y, z)$$

ein Integral der Schwingungsgleichung $\Delta V + \kappa^2 V = 0$.

Nunmehr gehen wir aus von der Reihenentwicklung für $e^{i r \cos \gamma}$. Es bedeutet:

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Für $e^{i r \cos \gamma}$ ergibt sich die Reihe¹⁾:

$$e^{i r \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \psi_n(r) P_n(\cos \gamma).$$

Die Kugelfunktion $P_n(\cos \gamma)$ läßt sich in $2n+1$ spezielle Kugelflächenfunktionen zerlegen²⁾:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \right.$$

wo

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \frac{d^m}{d(\cos \vartheta)^m} [P_n(\cos \vartheta)]$$

bedeutet.

1) Vgl. z. B. Handbuch d. phys. Optik, Bd. I, S. 567 Gl. (81 b). 1926.

Doch nennt der Verfasser dort $\frac{\psi_n(w)}{w}$, was er hier mit $\psi_n(w)$ bezeichnet hat.

2) Z. B. Whittaker, Watson, a. a. O. S. 328.

Wir stellen uns die Aufgabe, aus der Reihenentwicklung für $e^{ir \cos \gamma}$ eine Reihe für die Funktion

$$e^{i(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)}$$

zu finden, die nach Kugelfunktionen der Variablen ϑ_0, φ_0 fortschreitet. Es müssen also die Größen r, ϑ, φ durch die x, y, z ersetzt werden.

Verbinden wir die Größen r, ϑ, φ mit den x, y, z durch die Gleichungen

$$(23) \quad x = r \cos \vartheta; \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

so ist:

$$x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 = r \cos \gamma.$$

Wegen Gleichung (22) enthält die Reihe für $e^{ir \cos \gamma}$ Glieder von folgender Form:

$$\psi_n(r) P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}.$$

Jedes einzelne dieser Glieder genügt der Schwingungsgleichung.

Wir werden nunmehr versuchen, an die Stelle jedes der speziellen Integrale der Schwingungsgleichung für Polarkoordinaten ein ebensolches für die kartesischen Koordinaten zu setzen, das die Eigenschaft hat, für die spezielle Transformation (23) mit dem Integral in Polarkoordinaten übereinzustimmen. Mit anderen Worten, es soll sein:

$$\psi_n(r) P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} = \frac{\psi_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^n} \cdot \Phi_n(x, y, z),$$

sobald r, ϑ, φ mit x, y, z durch Gleichung (23) verbunden sind.

Eine solche Funktion herzustellen gelingt leicht, wenn wir berücksichtigen, daß jede Kugelflächenfunktion der Ordnung n , multipliziert mit r^n , eine homogene harmonische Funktion vom Grade n in den x, y, z wird, wenn Gleichung (23) erfüllt ist; und zwar gilt¹⁾:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} i^m r^n P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi \\ \quad = \frac{(m+n)!}{2\pi \cdot n!} \int_0^{2\pi} (x + iy \cos v + iz \sin v)^n \cos m v dv \\ i^m r^n P_n^m(\cos \vartheta) \sin m \varphi \\ \quad = \frac{(m+n)!}{2\pi \cdot n!} \int_0^{2\pi} (x + iy \cos v + iz \sin v)^n \sin m v dv. \end{array} \right.$$

1) Whittaker, Watson, a. a. O. S. 392.

Damit ist die Reihenentwicklung aber bereits gegeben, denn wir haben in der Reihe für $e^{i r \cos \vartheta}$ nur noch die Größen

$$\psi_n(r) P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}$$

durch

$$\frac{\psi_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^n} \cdot \frac{i^{-m} (m+n)!}{2\pi \cdot n!} \int_0^{2\pi} (x + i y \cos v + i z \sin v)^n \frac{\cos m v}{\sin m v} dv$$

zu ersetzen. Bezeichnen wir mit $S_n^m(x y z)$; $C_n^m(x y z)$ die homogenen harmonischen Funktionen

$$(25) \quad \begin{cases} C_n^m(x, y, z) = \frac{i^{-m} (m+n)!}{2\pi \cdot n!} \int_0^{2\pi} (x + i y \cos v + i z \sin v)^n \cos m v dv; \\ S_n^m(x, y, z) = \frac{i^{-m} (m+n)!}{2\pi \cdot n!} \int_0^{2\pi} (x + i y \cos v + i z \sin v)^n \sin m v dv, \end{cases}$$

so ergibt sich:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{i(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^n} \\ & \cdot \left\{ C_n^m(x y z) P_n^m(\cos \vartheta_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right. \\ & \quad \left. [C_n^m(x y z) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m \varphi_0 + S_n^m(x y z) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin m \varphi_0] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Aus dieser Reihe läßt sich nun aber leicht die Reihe für den Kern $K_1(\vartheta \varphi, \vartheta_0 \varphi_0)$ ableiten; wir haben zu diesem Zweck nur zu setzen:

$$x = \omega \cos \vartheta; \quad y = \omega k \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = 0.$$

Dies in (24) eingeführt erkennt man sofort, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} (x + i y \cos v)^n \sin m v dv = 0$$

ist. Es fallen in der gesuchten Reihenentwicklung alle Glieder, die den \sin eines Vielfachen von φ zum Faktor haben, heraus. Wir bezeichnen die mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Integrale

$$\int_0^{2\pi} (x + iy \cos v)^n \cos m v dv$$

mit $G_n^m(x, y)$, indem wir $G_n^m(x, y)$ durch folgende Reihen definieren:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} G_{2n}^{2m}(x, y) &= \frac{(2n-2m)!}{2n!} \sum_{\sigma=m}^n (-1)^\sigma \binom{2n}{2\sigma} \\ &\quad \cdot \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma-1}(\sigma+m)!(\sigma-m)!} x^{2n-2\sigma} y^{2\sigma} \\ G_{2n}^0(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\sigma=0}^n (-1)^\sigma \binom{2n}{2\sigma} \\ &\quad \cdot \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma-1}\sigma!\sigma!} x^{2n-2\sigma} y^{2\sigma} \\ G_{2n+1}^{2m}(x, y) &= \frac{(2n-2m+1)!}{(2n+1)!} \sum_{\sigma=m}^n (-1)^\sigma \binom{2n+1}{2\sigma} \\ &\quad \cdot \frac{2\sigma!}{2^{2\sigma-1}(\sigma+m)!(\sigma-m)!} x^{2n-2\sigma+1} y^{2\sigma} \\ G_{2n+1}^0(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\sigma=0}^n (-1)^\sigma \binom{2n+1}{2\sigma} \\ &\quad \cdot \frac{2\sigma!}{2^{2\sigma-1}\sigma!\sigma!} x^{2n-2\sigma+1} y^{2\sigma} \\ G_{2n+1}^{2m+1}(x, y) &= \frac{(2n-2m)!}{(2n+1)!} \sum_{\sigma=m}^n (-1)^\sigma \binom{2n+1}{2\sigma+1} \\ &\quad \cdot \frac{(2\sigma+1)!}{2^{2\sigma}(\sigma+m+1)!(\sigma-m)!} x^{2n-2\sigma} y^{2\sigma+1} \\ G_{2n+1}^{2m+1}(x, y) &= \frac{(2n-2m-1)!}{2n!} \sum_{\sigma=m}^n (-1)^\sigma \binom{2n}{2\sigma+1} \\ &\quad \cdot \frac{(2\sigma+1)!}{2^{2\sigma}(\sigma-m)!(\sigma+m+1)!} x^{2n-2\sigma-1} y^{2\sigma+1} \end{aligned} \right\} m \leq n.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir dann schreiben:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} K_1(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) &= e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}^n} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{m=0}^n G_n^m(\cos \vartheta, k \sin \vartheta \cos \varphi) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m \varphi_0 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Übertragen wir diese Methode sinngemäß auf den Kern $K_3(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0)$, so haben wir zu setzen:

$$x = \omega k' \cos \vartheta \quad y = 0 \quad z = i \omega k \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Dies in (24) eingetragen, erhalten wir die Integrale:

$$\int_0^{2\pi} (x + iz \sin v)^n \cos m v dv; \quad \int_0^{2\pi} (x + iz \sin v)^n \sin m v dv.$$

Das erste verschwindet, wenn m ungerade ist, das zweite, wenn m gerade ist. So erhalten wir folgende Entwicklung:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) &= e^{i\omega (k' \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + i k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(\omega \sqrt{k'^2 \cos^2 \vartheta - k^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi})}{\sqrt{k'^2 \cos^2 \vartheta - k^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}^n} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{m=0}^n (-1)^m G_n^{2m}(k' \cos \vartheta, i k \sin \vartheta \sin \varphi) \right. \\ &\quad \cdot P_n^{2m}(\cos \vartheta_0) \cos 2m \varphi_0 \\ &\quad \left. + (-1)^m G_n^{2m+1}(k' \cos \vartheta, i k \sin \vartheta \sin \varphi) \right. \\ &\quad \cdot P_n^{2m+1}(\cos \vartheta_0) \sin (2m+1) \varphi_0 \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

Eine ähnliche Entwicklung erhalten wir auch für den Kern $K_2(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0)$.

§ 6. Ein Exkurs auf das Gebiet der Integrale von Sonin

Zu einer bemerkenswerten Integralformel, die als eine Erweiterung gewisser Integrale von Sonin angesehen werden kann, gelangt man mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Paragraphen durch folgende Überlegungen:

Die Kugelfunktionen

$$P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m \varphi_0 \quad \text{und} \quad P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin m \varphi_0$$

haben die Eigenschaft der Orthogonalität, d. h. die Integrale

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n^m(\cos \vartheta_0) \frac{\cos m \varphi_0}{\sin m \varphi_0} \cdot P_\lambda^{\lambda}(\cos \vartheta_0) \frac{\cos \lambda \varphi_0}{\sin \lambda \varphi_0} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0$$

sind nur dann nicht Null, wenn $n = \lambda$ und $m = \lambda$ ist. Wollen wir eine Funktion $f(\vartheta_0, \varphi_0)$, die noch gewissen, hier nicht näher zu präzisierenden Bedingungen genügen muß, in eine nach Kugelflächenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln, so erhalten wir die Koeffizienten dieser Entwicklung durch die Integrale

$$a_n^m = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta_0, \varphi_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) \frac{\cos m \varphi_0}{\sin m \varphi_0} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Der Faktor a_n^m ist, wenn m von Null verschieden,

$$a_n^m = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{1}{\pi};$$

und wenn m gleich Null ist,

$$a_n^0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{2\pi}.$$

Wollen wir die Funktion $e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)}$ in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln, so erhalten wir zur Berechnung der Koeffizienten folgende Integrale:

$$a_n^m \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega(s \cos \vartheta_0 + t \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} P_n^m(\cos \vartheta_0) \frac{\cos m \varphi_0}{\sin m \varphi_0} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0,$$

wo $s = \cos \vartheta$, $t = k \sin \vartheta \cos \varphi$ gesetzt wurde.

Die Integration über φ_0 kann man sofort ausführen. Es ist

$$e^{i\omega(s \cos \vartheta_0 + t \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} = e^{i\omega s \cos \vartheta_0} \cdot e^{i\omega t \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0}.$$

Den zweiten Faktor entwickelt man in bekannter Weise nach den \cos der Vielfachen von φ_0 und erhält:

$$e^{i\omega t \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0} = J_0(\omega t \sin \vartheta_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(\omega t \sin \vartheta_0) \cos k \varphi_0.$$

Führt man dies in das Integral ein, so erkennt man, daß die Integrale, die sin der Vielfachen von φ_0 enthalten, verschwinden, während die anderen Integrale übergehen in:

$$2i^m \pi a_n^m \int_0^\pi e^{i\omega s \cos \vartheta_0} J_m(\omega t \sin \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0.$$

Reihen, die nach Kugelflächenfunktionen fortschreiten, sind eindeutig. Daher dürfen wir schließen, daß die in dem vorigen Paragraphen gefundenen Koeffizienten der Reihe (28) mit den hier gefundenen Integralen übereinstimmen. Also:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i\omega s \cos \vartheta_0} J_m(\omega t \sin \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ &= i^{n-m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} G_n^m(s, t) \frac{\psi_n(\omega \sqrt{s^2+t^2})}{\sqrt{s^2+t^2}^n}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir hier in Gleichung (30) $n = m$, so ist wegen

$$P_n^n(\cos \vartheta_0) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sin^n \vartheta_0$$

und [gemäß Gleichung (27)]

$$G_n^n(s, t) = \frac{t^n}{n! 2^{n-1}}$$

folgende Gleichung erfüllt:

$$(30a) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i\omega s \cos \vartheta_0} J_n(\omega t \sin \vartheta_0) \sin^{n+1} \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ &= 2t^n \cdot \frac{\psi_n(\omega \sqrt{s^2+t^2})}{\sqrt{s^2+t^2}^n}. \end{aligned} \right.$$

Sonin und Gegenbauer finden folgende Gleichung¹⁾:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i\omega s \cos \vartheta_0} J_{\nu-1/2}(\omega t \sin \vartheta_0) \sin^{\nu+1/2} \vartheta_0 d\vartheta_0 \\ &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{t^{\nu-1/2}}{\sqrt{s^2+t^2}^\nu} J_\nu(\omega \sqrt{s^2+t^2}). \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser

$$\begin{aligned} \nu - \frac{1}{2} &= n; \quad \sqrt{\frac{\pi}{2\omega \sqrt{s^2+t^2}}} \cdot J_{n+1/2}(\omega \sqrt{s^2+t^2}) \\ &= \psi_n(\omega \sqrt{s^2+t^2}) \quad [\text{vgl. Gl. (21)}], \end{aligned}$$

¹⁾ N. Nielsen, Handbuch d. Theor. d. Zylinderfunktionen, S. 182. Leipzig 1904.

so geht sie in die Gleichung (30a) über. Wir können daher das Integral (30) als eine Verallgemeinerung des Sonin-Gegenbauerschen betrachten.

Setzen wir in (30) $t = 0$ und $m = 0$, so haben wir noch, weil a_n^0 nur halb so groß ist, wie a_n^m sein müßte, wenn wir $m = 0$ setzen, mit zwei zu multiplizieren; dann erhalten wir aber unter Beachtung von (27):

$$(30b) \quad \int_0^\pi e^{i\omega s \cos \vartheta_0} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = 2i^n \psi_n(\omega s).$$

Dies aber ist die bekannte Integraldarstellung für die ψ -Funktionen.

§ 7. Formale Auflösung der Integralgleichungen

Wir gehen daran, die Integralgleichungen aufzulösen, die wir mit Hilfe der Kerne (20) und (20a) bilden können. Dabei wird sich ergeben, daß wir die Reihenentwicklungen für die von uns gesuchten Funktionen numerisch nicht aufstellen können — zu diesem Zweck werden wir eine andere Methode benutzen —, jedoch werden wir in der Lage sein, die Theorie und die Eigenschaften dieser Funktionen vollständig anzugeben. Die Auflösung der Integralgleichungen wird dagegen auch numerisch durchgeführt werden können, wenn der Wert des Moduls der elliptischen Funktionen gleich 1 oder Null wird. Hierauf jedoch werden wir erst wesentlich später eingehen und zunächst die Theorie der gesuchten Funktionen für beliebige Werte von k durchführen.

Die Eigenfunktionen der Kerne (20) und (20a) sind, wie wir gezeigt hatten, Funktionen, die auf einer Kugelfläche endlich, eindeutig und stetig sind. Solche Funktionen kann man nach einem Satz aus der Theorie der Kugelflächenfunktionen immer in Reihen entwickeln, die nach Kugelflächenfunktionen fortschreiten. Wir werden mit Hilfe der Kerne (20) und (20a) zeigen, daß solche Reihen wirklich existieren.

Eine genauere Untersuchung der Differentialgleichung (11) führte den Verfasser zu der Vermutung, daß die Integrale dieser Differentialgleichung sich in acht verschiedene Typen einteilen lassen müssen. Diese Untersuchungen sind hier, da sie nur vorläufigen Charakter tragen, nicht mitgeteilt; es schien

diese Unterlassung zweckmäßig, um den Umfang dieser Arbeit nicht allzusehr anschwellen zu lassen. Auch rechtfertigt sich dies im Hinblick darauf, daß diesen Untersuchungen keine Beweiskraft zugesprochen werden kann.

Da ferner, wenn $f(\vartheta)$ ein Integral von (11) mit den geforderten Periodizitätseigenschaften ist, das Produkt $f(\beta) \cdot f(\gamma)$ mit Hilfe der Gleichungen (8) auf die Koordinaten ϑ und φ umgerechnet, der Differentialgleichung (13) genügen muß, so lag weiter die Vermutung nahe, daß sich auch die Integrale von (13) in acht verschiedene Typen einteilen lassen werden. Diese Typen können sich aber nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die sie darstellenden Reihen nicht die gleichen Entwicklungsfunktionen aufweisen, was aber dann nur möglich ist, wenn in den Reihen nicht alle Kugelfunktionen auftreten, sondern nur solche, die z. B. gleiche Irrationalitäten aufweisen. Nun sind aber alle Zugeordneten der Kugelfunktionen, die einen geraden oberen Index haben, ganze rationale Funktionen, während die mit ungeradem oberen Index immer die Irrationalität $\sqrt{1-x^2}$ aufweisen. Daher liegt es nahe, Reihen anzusetzen, bei denen die Zugeordneten entweder gerade oder ungerade obere Indizes haben. Ferner wird man auch gerade und ungerade untere Indizes unterscheiden, schließlich auch Reihen als zu verschiedenen Typen gehörig betrachten, je nachdem sie nach

$P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi$ oder nach $P_n^m(\cos \vartheta) \sin m \varphi$ fortschreiten.

Wir legen die Integralgleichung

$$f(\vartheta, \varphi) = \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} f(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0$$

zugrunde und machen für $f(\vartheta, \varphi)$ den Ansatz:

$$(31) \quad f(\vartheta, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cdot \cos 2m \varphi \right),$$

dessen Richtigkeit wir zu prüfen haben. Um dies durchzuführen, benutzen wir die für den Kern

$$e^{i\omega(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}$$

gefundene Reihenentwicklung (28), indem wir in ihr aber ϑ mit ϑ_0 und φ mit φ_0 vertauschen. Die Reihe hat also folgende Gestalt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^n} \left\{ \sum_{m=0}^n G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi \right\}.$$

Diese Reihe als Kern in die Integralgleichung eingeführt, ferner $f(\vartheta, \varphi)$ auf der linken Seite durch die Reihenentwicklung (31) ersetzt, ergibt durch Vergleichung der Koeffizienten der Kugelflächenfunktionen auf der rechten und auf der linken Seite:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} A_{2n}^{2m} &= (-1)^n (4n+1) \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n}} \\ &\quad \cdot G_{2n}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \cdot f(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0, \end{aligned} \right.$$

Auf der rechten Seite erscheinen aber zunächst auch Koeffizienten von Kugelfunktionen, deren untere bzw. obere Indizes nicht gerade sind. Diese sind:

$$\begin{aligned} A_\tau^{2m+1} &= (i^\tau (2\tau+1) \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_\tau(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^\tau} \\ &\quad \cdot G_\tau^{2m+1}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \cdot f(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \\ &\quad (\tau \text{ gerade oder ungerade}), \\ A_{2n+1}^{2m} &= i(-1)^n (4n+3) \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n+1}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n+1}} \\ &\quad \cdot G_{2n+1}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \cdot f(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned}$$

Man zeigt sehr leicht, daß diese, wenn man für $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ den Ansatz (31) benutzt, verschwinden. Wir wollen den Beweis nur für A_τ^{2m+1} geben, für das andere Integral verläuft er analog.

Die Funktion $\frac{\psi_n(x)}{x^n}$ enthält, wie man sich leicht aus der Definitionsgleichung (21) überzeugt, nur gerade Potenzen von x . Daher ist auch

$$\frac{\psi_r(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^r}$$

durch eine Reihe darstellbar, die nur gerade Potenzen von $\cos \vartheta_0$ und $\cos \varphi_0$ enthält. Die Funktion

$$G_r^{2m+1}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)$$

aber enthält nur ungerade Potenzen von $\cos \vartheta_0$ und von $\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0$. Das gleiche gilt demgemäß auch für das Produkt

$$\frac{\psi_r(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^r} \cdot G_r^{2m+1}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0).$$

Führen wir jetzt in (32) für $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ den Ausdruck (31) ein, so würden wir immer zu Integralen der folgenden Form geführt werden:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} \vartheta_0 \cdot \cos^{2m+1} \vartheta_0 \cdot \cos^{2p+1} \varphi_0 P_{2\sigma}^{2\mu}(\cos \vartheta_0) \cdot \cos 2\mu \varphi_0 \cdot \sin \vartheta_0 \cdot d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Diese Integrale sind aber immer Null, und damit ist die aufgestellte Behauptung bereits erwiesen. In der gleichen Weise zeigt man das Verschwinden der Größe A_{2n+1}^{2m} .

Jetzt zeigen wir, daß die Reihe (31), in der die A_{2n}^{2m} durch die Gleichung (22) bestimmt sind, gleichmäßig konvergiert für alle Werte von ϑ zwischen Null und π und φ zwischen Null und 2π . Zu diesem Zweck machen wir eine Abschätzung der durch die Gleichung (32) dargestellten Größen, indem wir beachten, daß A_{2n}^{2m} , abgesehen vom Faktor

$$(-1)^n (4n+1)\lambda,$$

immer kleiner ist als das Maximum des Integranden, multipliziert mit der Maßzahl 4π der Oberfläche der Einheitskugel. Der Integrand ist ein Produkt aus drei Funktionen, und das Maximum eines solchen Produktes ist sicher nicht größer als das Produkt der Maxima jeder der drei Funktionen. Von der Funktion $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ wissen wir nur, daß sie als Lösung der Integralgleichung (19) endlich ist auf einer Kugelfläche und daher auf dieser ein Maximum erreicht, das wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit dieses Beweises gleich 1 setzen

können, da in $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ ein konstanter Faktor noch zu willkürlicher Verfügung frei ist. Die Funktion $\frac{\psi_{2n}(\omega x)}{x^{2n}}$ erreicht für $x = 0$ ihr größtes Maximum, nämlich den Wert

$$\frac{\sqrt{\pi} \omega^{2n}}{2^{2n+1} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)}.$$

Zur Bestimmung des Maximums von $G_{2n}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)$ denken wir daran, daß nach den Entwicklungen des § 5 die fragliche Funktion durch das Integral

$$2 \frac{(2n-2m)!}{2\pi \cdot (2n)!} \int_0^{2\pi} (\cos \vartheta_0 + i k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \cos u)^{2n} \cos 2m u du$$

dargestellt wird, aus dem man unmittelbar abliest, daß

$$\left| G_{2n}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \right| \leq 2 \cdot \frac{(2n-2m)!}{(2n)!} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \vartheta_0 \leq \pi \\ 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$\left| G_{2n}^0(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \right| \leq 1$$

ist. Da weiter

$$P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m \varphi$$

$$= \frac{(-1)^n (2n+2m)!}{2\pi \cdot (2n)!} \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(\varphi - u)]^{2n} \cos 2m u du$$

ist, so folgt die ebenfalls gleich zu benutzende Ungleichung;

$$\left| P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m \varphi \right| \leq \frac{(2n-2m)!}{(2n)!}.$$

Wir können jetzt folgende Ungleichung anschreiben, deren Richtigkeit man leicht mit Hilfe der eben gegebenen Formeln nachprüft:

$$A_{2n}^{2m} \leq 4 \sqrt{\pi}^3 \lambda (4n+1) \frac{\omega^{2n}}{2^{2n+1} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(2n-2m)!}{(2n)!}.$$

Das $2n$ -te Glied in der Reihe (31) ist nun aber eine Summe, nämlich:

$$\sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m \varphi.$$

Für diese Summe müssen wir ebenfalls eine Abschätzung finden. Eine solche ergibt sich aus der Ungleichung für die A_{2n}^{2m} und aus der für die Funktionen $P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m\varphi$.

Man findet so:

$$\left| \sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m\varphi \right| \leq 4\sqrt{\pi} \lambda(4n+1) \frac{\omega^{2n}}{2^{2n+1} H\left(2n + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(2n+2)(2n+4) \dots (2n+2m)}{(2n-2)(2n-4) \dots (2n-2m)} \right\}.$$

Jeden der Brüche, die unter dem Summenzeichen stehen, ersetzen wir durch einen größeren, nämlich durch $\frac{(2n+2m)^n}{2n-2}$. Dann aber setzen wir noch $m = n$. So erhalten wir schließlich:

$$\left| \sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \cos 2m\varphi \right| \leq \frac{4\sqrt{\pi}^3 \lambda(4n+1)}{n-1} \frac{\omega^{2n}}{2^{2n+1} H\left(2n + \frac{1}{2}\right)} \{n-1 + 2^{2n} \cdot n^{n+1}\}.$$

Offenbar brauchen wir nur noch zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} n^{n+1} \omega^{2n}}{2^{2n+1} H\left(2n + \frac{1}{2}\right)}$$

konvergiert. Zunächst kürzen sich die Potenzen von 2 weg, bis auf eine im Nenner. Dann beachten wir, daß

$$\prod \left(2n + \frac{1}{2}\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \left(2n - \frac{1}{2}\right) \left(2n - \frac{3}{2}\right) \dots \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \prod \left(n - \frac{1}{2}\right).$$

ist. Im Zähler steht ein Produkt aus $n+1$ Faktoren, von denen jeder gleich n ist. Im Nenner steht außer der Größe $2H\left(n - \frac{1}{2}\right)$ noch ein Produkt aus $n+1$ Faktoren, von denen jeder größer ist als n . Daher ist

$$\frac{n^{n+1} \omega^{2n}}{2 H\left(2n + \frac{1}{2}\right)} \leq \frac{\omega^{2n}}{2 H\left(n - \frac{1}{2}\right)} < \frac{\omega^{2n}}{2(n-1)!}.$$

Wir haben damit gezeigt, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+1} \omega^{2n}}{2 \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)}$$

konvergiert. Daraus folgern wir die Konvergenz der Maxima der absoluten Beträge von

$$\sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m} (\cos \vartheta) \cos 2m\varphi,$$

denn der noch hinzukommende Faktor $\frac{4n+1}{n-1}$ stört die Konvergenz in keiner Weise, so daß die Behauptung, die Reihe (31) konvergiere gleichmäßig, zu Recht besteht.

In derselben Art, wie wir es eben getan haben, können wir vorgehen, um zu anderen Lösungstypen der Integralgleichung (19) zu gelangen, z. B. können wir zeigen, daß folgender Lösungstyp existiert:

$$(33) \quad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n A_{2m+1}^{2m} P_{2m+1}^{2m} (\cos \vartheta) \cos 2m\varphi \right].$$

Die hier auftretenden Koeffizienten ergeben sich analog den Überlegungen, die zur Gleichung (32) führten; das Ergebnis ist

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{2n+1}^{2m} &= i\lambda(-1)^n(4n+3) \\ &\cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n+1}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n+1}} \\ &\cdot G_{2n+1}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \cdot f(\vartheta_0, \varphi_0) \cdot \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (31) und (33) unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß die Reihe (31) nach Kugelfunktionen mit geradem unteren Index, die Reihe (33) aber nach solchen mit ungeradem unteren Index fortschreiten. Für beide Typen führen wir ein gemeinschaftliches Symbol ein, indem wir als Funktionszeichen für (31) und (33) den Buchstaben R wählen. Wir unterscheiden die beiden Typen voneinander, indem wir der Reihe (31) entsprechenden Funktion einen geraden

Index, der der Reihe (33) entsprechenden Funktion einen ungeraden Index erteilen. Also:

$$(31a) \quad R_{2p}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n A_{2n}^{2m} F_{2n}^{2m} (\cos \vartheta) \cos 2m \varphi \right],$$

$$(33a) \quad R_{2p+1}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n A_{2n+1}^{2m} P_{2n+1}^{2m} (\cos \vartheta) \cos 2m \varphi \right].$$

Aus derselben Integralgleichung (19) finden wir noch zwei andere Typen, die beide als Kennzeichen den Buchstaben S erhalten sollen, nämlich:

$$(35) \quad S_{2p}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{n-1} A_{2n}^{2m+1} P_{2n}^{2m+1} (\cos \vartheta) \cos (2m+1) \varphi \right],$$

$$(36) \quad S_{2p+1}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n A_{2n+1}^{2m+1} P_{2n+1}^{2m+1} (\cos \vartheta) \cos (2m+1) \varphi \right].$$

Die Koeffizienten dieser sind durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{2n}^{2m+1} \\ = (-1)^n (4n+1) \lambda \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n}} \\ \cdot G_{2n}^{2m+1}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) S_{2p}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0, \end{array} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{2n+1}^{2m+1} \\ = (-1)^n (4n+3) i \lambda \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n+1}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n+1}} \\ \cdot G_{2n+1}^{2m+1}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) S_{2p+1}(\vartheta_0; \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{array} \right.$$

Dies sind alle Typen, die wir aus der Integralgleichung (19) ableiten können. Es fehlen noch vier, von denen zwei sich ohne weiteres aus den bisher gefundenen unter Betrachtung der Differentialgleichung (13) herleiten lassen. Es fehlen gerade noch die Typen, die nach \sin der Vielfachen von φ fortschreiten. Diejenigen Reihen, die ungerade Vielfache des \sin enthalten, können wir aber leicht aus den Funktionen $S_{2p}(\vartheta, \varphi)$ und $S_{2p+1}(\vartheta, \varphi)$ herleiten. Um zu dieser Entwicklung zu ge-

langen, ersetzen wir in der Differentialgleichung (13) das Azimut φ durch $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Der Differentialausdruck wird dadurch nicht geändert, wohl aber ändert sich die Größe

$$\omega^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + E'.$$

Sie geht nämlich über in

$$(39) \quad \begin{cases} \omega^2 k'^2 (\cos^2 \vartheta + \left(\frac{ik}{k'}\right)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + E^*; \\ k' = \sqrt{1 - k^2}; \quad E^* = E' + \omega^2 k^2. \end{cases}$$

Hier müssen wir nun beachten, daß die von uns betrachteten Funktionen nicht allein Funktionen der Variablen ϑ und φ sind, sondern noch von zwei Parametern abhängen, nämlich von ω und k . Es wird manchmal wünschenswert sein, auch diese Abhängigkeit zum Ausdruck zu bringen, was wir dadurch tun wollen, daß wir das Parameterpaar ω, k hinter ϑ, φ , durch ein Semikolon getrennt, in die Klammer einschreiben. Wenn wir also bemerken machen wollen, daß z. B. die Funktion $S_{2n}(\vartheta, \varphi)$ auch von ω und k abhängt, so schreiben wir $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$.

Wir denken uns nun in der Funktion $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$ den Parameter k durch den Wert ik/k' ersetzt, betrachten also die Funktion $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, \frac{ik}{k'})$. Diese genügt, wie man sofort sieht, der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ - \left[\omega^2 \left(\cos^2 \vartheta + \left(\frac{ik}{k'} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right) + E' \right] \cdot f = 0. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir in $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, \frac{ik}{k'})$ noch an die Stelle von φ die Größe $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Die Differentialgleichung, der diese Funktion genügt, ist nach dem Vorhergehenden auch ohne weiteres zu ermitteln. Wir brauchen dazu nur den Ausdruck (39) zu betrachten und in ihm k durch $\frac{ik}{k'}$ und k' durch $\sqrt{1 + \frac{k^2}{k'^2}}$ zu ersetzen. Dieser Ausdruck ist aber wegen $k^2 + k'^2 = 1$ gerade gleich $1/k'$; daher genügt die Funktion

$$S_{2n} \left(\vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi; \omega, \frac{ik}{k'} \right)$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \left[\left(\frac{\omega}{k'} \right)^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + E^* \right] \cdot f = 0. \quad (44)$$

Diese aber stimmt fast vollkommen mit (13) überein, nur steht hier an Stelle von ω die Größe ω/k' . Daraus folgt dann: Die Funktion

$$S_{2n} \left(\vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi; \omega k', \frac{ik}{k'} \right),$$

die also, die aus $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$ dadurch entsteht, daß man φ durch $\frac{\pi}{2} - \varphi$, ω durch $\omega k'$ und k durch $\frac{ik}{k'}$ ersetzt, genügt ebenfalls der Differentialgleichung (13). Die so erhaltene Funktion ist mit keinem bisher bekannten Funktionstyp identisch. Wir bezeichnen diese Funktion mit $T_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$. Es gilt die Gleichung

$$(40) \quad T_{2p}(\vartheta, \varphi; \omega, k) = S_{2p} \left(\vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi; \omega k', \frac{ik}{k'} \right).$$

Die Funktion $T_{2p}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$ hat folgenden Reihentyp:

$$(41) \quad T_{2p}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n-1} B_{2n}^{2m+1} P_{2n}^{2m+1}(\cos \vartheta) \sin(2m+1)\varphi \right].$$

Die Koeffizienten B_{2n}^{2m+1} dieser Reihe hängen mit den Koeffizienten der Reihe (35) durch folgende Gleichungen zusammen:

$$(42) \quad B_{2n}^{2m+1}(\omega, k) = (-1)^{m+1} A_{2n}^{2m+1} \left(\omega k', \frac{ik}{k'} \right).$$

Hier ist durch die benutzte Schreibweise darauf hingewiesen, daß die Koeffizienten unserer Reihenentwicklungen Funktionen des Parameterpaares ω, k bzw. $\omega k', \frac{ik}{k'}$ sind.

Dieselbe Überlegung, die wir eben für die Funktion $S_{2n}(\vartheta, \varphi; \omega, k)$ angestellt haben, läßt sich auch mit genau dem gleichen Ergebnis auf die Funktionen $S_{2n+1}(\vartheta, \varphi)$ anwenden; wir erhalten so die Gleichungen:

$$(43) \quad T_{2p+1}(\vartheta, \varphi; \omega, k) = S_{2p+1} \left(\vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi; \omega k', \frac{ik}{k'} \right),$$

$$(44) \quad T_{2p+1}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n B_{2n+1}^{2m+1} P_{2n+1}^{2m+1}(\cos \vartheta) \sin(2m+1)\varphi \right],$$

$$(45) \quad B_{2n+1}^{2m+1}(\omega, k) = (-1)^{m+1} A_{2n+1}^{2m+1} \left(\omega k' \frac{ik}{k'} \right).$$

Die gleiche Methode auf die Funktionen $R_{2n}(\vartheta, \varphi)$ und $R_{2n+1}(\vartheta, \varphi)$ angewandt, liefert keine neuen Typen. Es sei auch darauf hingewiesen, daß man die Funktionen $T_{2n}(\vartheta, \varphi)$ und $T_{2n+1}(\vartheta, \varphi)$ aus einer Integralgleichung hätte herleiten können, die, nicht wie Gleichung (19) mit dem Kerne (20), sondern mit Hilfe des Kernes $K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ [Gleichung (20a)] in derselben Weise gebildet ist.

Von den vermuteten acht verschiedenen Lösungstypen haben wir sechs gefunden. Man wäre geneigt anzunehmen, daß sich die übrigen beiden Typen aus den Kernen (20a) ableiten lassen würden. Dies ist nur zum Teil richtig. Der Kern K_3 kommt überhaupt nicht in Frage, weil bei der Entwicklung dieses Kernes in eine Fourierreihe der Variablen φ sin der geraden Vielfachen von φ nicht auftreten, die beiden noch fehlenden Typen als Funktionen von φ sich aber in eine Fourierreihe entwickeln lassen müssen, die nur sin der geraden Vielfachen von φ enthält. Hingegen gestattet der Kern $K_2(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ eine solche Entwicklung, doch sind, wie eine nähere Betrachtung zeigt, die Koeffizienten von $\sin 2m\varphi$ nur gerade Potenzreihen von $\cos \vartheta$, so daß wir aus $K_2(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ wohl Reihen erhalten, die aus Kugelfunktionen

$$P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \sin 2m\varphi$$

mit geradem unteren Index bestehen, nicht aber solche, bei denen die Kugelfunktionen einen ungeraden unteren Index haben. Es besteht daher hier noch eine Lücke, deren Auffüllung der folgende Paragraph gewidmet ist. Dabei ist es zweckmäßig, den Existenzbeweis für den siebenten Funktionstyp, der an den Kern $K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ angeknüpft werden könnte, erst im nächsten Paragraphen zu führen, weil uns die folgenden Entwicklungen einen neuen Kern liefern werden, der zur Durchführung des Existenzbeweises geeigneter ist als der Kern $K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$.

§ 8. Eine neue Integralgleichung,
der gewisse Integrale der Gleichung (13) zu genügen haben

Wir betrachten die fünfdimensionale Schwingungsgleichung

$$(46) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + x^2 f = 0.$$

Es sei $f(x, y, z, u, v) = f(x, y, \varrho)$ ein Integral dieser Differentialgleichung, das die Variablen z, u, v nur in der Verbindung

$$\varrho = \sqrt{z^2 + u^2 + v^2}$$

enthält. Dann genügt $f(x, y, \varrho)$ als Funktion von x, y, ϱ , der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x^2 f = 0.$$

Diese aber können wir auch, da x, y und ϱ voneinander unabhängig sind, so schreiben:

$$\frac{\partial^2 (\varrho f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varrho f)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\varrho f)}{\partial \varrho^2} + x^2 (\varrho f) = 0.$$

Damit haben wir den Satz: Ist $f(x, y, \varrho)$, wo ϱ die Wurzel $\sqrt{z^2 + u^2 + v^2}$ bedeutet, ein Integral der fünfdimensionalen Schwingungsgleichung (46), so genügt die Funktion $\Phi = z \cdot f(x, y, z)$ in ihrer Abhängigkeit von x, y, z der dreidimensionalen Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + x^2 \Phi = 0.$$

Angenommen, wir hätten ein Integral von (46) in der Funktion $f(x, y, \varrho)$ gefunden. Wir ersetzen dann x durch die Größe $q \cdot dn\alpha \cdot \cos \vartheta$, y durch $q k cn\alpha \sin \vartheta \cos \varphi$ und ϱ durch $i q k sn\alpha \sin \vartheta \sin \varphi$ [vgl. Gleichungen (7) und (8)]. Dann ist:

$$i q k sn\alpha \cdot \sin \vartheta \sin \varphi \cdot f(q dn\alpha \cos \vartheta; q k cn\alpha \sin \vartheta \cos \varphi; i q k sn\alpha \sin \vartheta \sin \varphi)$$

ein Integral der auf die Koordinaten $\alpha, \vartheta, \varphi$ umgerechneten Wellengleichung. Schließlich sei angenommen, die Funktion $f(q dn\alpha \cos \vartheta; q k cn\alpha \sin \vartheta \cos \varphi; i q k sn\alpha \sin \vartheta \sin \varphi)$ zerfalle in ein Produkt von zwei Funktionen, von denen die eine nur von α , die andere nur von ϑ und φ abhängt:

$$f(q dn\alpha \cdot \cos \vartheta; q k cn\alpha \sin \vartheta \cos \varphi; i q k sn\alpha \sin \vartheta \sin \varphi) = Y(\alpha) \Theta(\vartheta, \varphi).$$

Dann ersieht man leicht, daß $dn \propto Y(\alpha)$ der Differentialgleichung (11), $\sin \vartheta \sin \varphi \Theta(\vartheta, \varphi)$ aber der Differentialgleichung (13) genügen muß. Daraus folgt auch die Differentialgleichung, der $\Theta(\vartheta, \varphi)$ allein zu genügen hat, nämlich:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} + 3 \cot \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} + 2 \cot \varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right] \\ & - [\omega^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + \tilde{E}] \Theta = 0; \\ & \tilde{E} = E' - 2. \end{aligned} \right.$$

Die Funktion

$$(w + ix \cos \vartheta_0 + iy \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + iz \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \tau_0 + iu \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \cos \sigma_0 + iv \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \sin \sigma_0)^n$$

ist in ihrer Abhängigkeit von den Variablen x, y, z, u, v, w ein Integral der sechsdimensionalen Laplacegleichung:

$$(48) \quad \Delta^{\text{VI}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 0.$$

Dies ist unschwer nachzurechnen, so daß wir auf eine Ausführung des Beweises dieser Behauptung verzichten können. Denken wir uns eine Funktion $f(x)$ durch eine konvergente Potenzreihe ihres Argumentes gegeben, so ersieht man leicht, daß auch

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(w + ix \cos \vartheta_0 + iy \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \\ & + iz \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \tau_0 + iu \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \cos \sigma_0 \\ & + iv \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \sin \sigma_0) \end{aligned} \right.$$

der Differentialgleichung (48) genügt. Daraus finden wir dann das allgemeine Integral von (48), indem wir mit einer beliebigen Funktion der Variablen $\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0$ multiplizieren und dann über diese integrieren. Die Grenzen der Integrationen sind so zu wählen, daß das Integral wirklich der Gleichung (48) genügt, was sich immer erreichen läßt. Ist z. B. die Funktion, mit der man (49) multipliziert, in bezug auf $\varphi_0, \tau_0, \sigma_0$ periodisch mit der Periode 2π und so beschaffen, daß sie für $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_0 = \pi$ einen von den Variablen $\varphi_0, \tau_0, \sigma_0$ unabhängigen Wert annimmt, so genügt folgendes Integral der Gleichung (48), wenn $\Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0)$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist:

$$(50) \left\{ \int_{\vartheta_0=0}^{\pi} \int_{\varphi_0=0}^{2\pi} \int_{\tau_0=0}^{2\pi} \int_{\sigma_0=0}^{2\pi} f(w + ix \cos \vartheta_0 + iy \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \dots) \cdot \Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0) d\vartheta_0 d\varphi_0 d\tau_0 d\sigma_0. \right.$$

Die Forderung, daß die Integrale von (48) die Variable w nur als Faktor e^{xw} enthalten sollen, führt die Gleichung (48) in die fünfdimensionale Schwingungsgleichung (46) über, während sich aus (50) das allgemeine Integral dieser ergibt:

$$(51) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x (\cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \tau_0 + u \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \cos \sigma_0 + v \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \tau_0 \sin \sigma_0)} \cdot \Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0) d\vartheta_0 d\varphi_0 d\tau_0 d\sigma_0.$$

Wie wir zeigten, können aber nur die Integrale Bezug auf unser Problem haben, die die Variablen z , u , v lediglich in der Verbindung $\rho = \sqrt{z^2 + u^2 + v^2}$ enthalten. Aus (50) leiten wir solche Ausdrücke in folgender Weise her: Zunächst setzen wir:

$\Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0) = \Omega(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \sin \tau_0$,
so daß also $\Phi(\vartheta_0, \varphi_0, \tau_0, \sigma_0)$ unabhängig von σ_0 wird. Ferner schreiben wir:

$z = \rho \cos \tau$; $u = \rho \sin \tau \cos \sigma$; $v = \rho \sin \tau \sin \sigma$,
und definieren schließlich:

$$\cos \tilde{\gamma} = \cos \tau \cos \tau_0 + \sin \tau \sin \tau_0 \cos(\sigma - \sigma_0).$$

Dies in (51) eingesetzt, erhalten wir:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x (\cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \rho \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \tilde{\gamma})} \cdot \Omega(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \sin \tau_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 d\tau_0 d\sigma_0.$$

Beachtet man ferner die von Heine¹⁾ abgeleitete Gleichung:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_0=0}^{\pi} \int_{\sigma_0=0}^{2\pi} f(\cos \tilde{\gamma}) \sin^{n+1} \tau_0 \sin^n \sigma_0 d\tau_0 d\sigma_0 \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\pi} f(\cos \tilde{\gamma}) \sin^{n+1} \tilde{\gamma} d\tilde{\gamma}, \end{aligned}$$

dann aber auch die Gleichung (30b), so ergibt sich schließlich unter Vernachlässigung unwesentlicher Konstanten:

$$(51a) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x (\cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} \psi_0(x \rho \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0) \cdot \Omega(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

1) E. Heine, a. a. O. I, S. 310.

Hier ersetzen wir ϱ durch z und rechnen dann die Größen x, y, z auf die Koordinaten $\alpha, \vartheta, \varphi$ [Gleichungen (7) und (8)] um. Da auch die vorhin eingeführte Funktion $Y(\alpha) \cdot \Theta(\vartheta, \varphi)$ ein Integral der Schwingungsgleichung (46) war, so liegt es nahe, die Darstellung

$$Y(\alpha) \cdot \Theta(\vartheta, \varphi) = \text{const} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega (dn \alpha \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \epsilon n \alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \cdot \psi_0(i\omega k \sin \alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0) \cdot \Omega(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 d\vartheta_0 d\varphi_0; \quad \omega = \kappa \cdot q$$

zu vermuten. Setzen wir hier $\alpha = 0$, so werden wir auf folgende Darstellung für die Integrale der Differentialgleichung (47) geführt:

$$(51b) \quad \Theta(\vartheta, \varphi) = \text{const} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \cdot \Omega(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Hierin ist dann noch die zunächst willkürliche Funktion Ω , von der wir nur Endlichkeit, Eindeutigkeit und Stetigkeit für $0 < \vartheta_0 < \pi$; $0 < \varphi_0 < 2\pi$ fordern, so zu bestimmen, daß die durch (51b) dargestellte Funktion $\Theta(\vartheta, \varphi)$ der Differentialgleichung (47) genügt.

Wir führen einen Operator $\tilde{D}_{\vartheta, \varphi}$ ein durch die Gleichung

$$\tilde{D}_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^3 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] - \omega^2 (\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi).$$

Man zeigt nun, daß die Funktion $e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}$ der Differentialgleichung

$$\tilde{D}_{\vartheta, \varphi} f - \tilde{D}_{\vartheta_0, \varphi_0} f = 0$$

genügt. Dazu beachte man, daß der jetzt eingeführte Operator mit dem früher auf S. 627 eingeführten Operator in folgender Weise zusammenhängt:

$$\tilde{D}_{\vartheta, \varphi} = D_{\vartheta, \varphi} + 2 \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{2 \cot \varphi}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

da ferner $e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}$ der Gleichung

$$D_{\vartheta, \varphi} f - D_{\vartheta_0, \varphi_0} f = 0$$

Genüge leistet, ist es nur noch nötig zu zeigen, daß

$$\left(\cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cot \varphi}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f = \left(\cot \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} + \frac{\cot \varphi_0}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) \cdot f$$

ist; dies aber rechnet man leicht mit Hilfe der auf S. 628 gegebenen Formeln nach.

Nun verfährt man genau wie früher, indem man mit Hilfe von partiellen Integrationen zeigt, daß die durch (51b) dargestellte Funktion sicher der Differentialgleichung (47) genügt, wenn $\Omega(\vartheta_0, \varphi_0)$ diese selbe Differentialgleichung befriedigt. Man schließt daraus, daß die Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(\vartheta, \varphi) &= \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ &\quad \cdot \theta(\vartheta_0, \varphi_0) \sin^3 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned} \right.$$

Integrale der Differentialgleichung (47) sind.

Uns interessieren aber nicht die Integrale von (47), sondern wir suchen die Integrale der Differentialgleichung (13). Wir hatten aber gezeigt, daß die Integrale von (47), wenn man sie mit $\sin \vartheta \sin \varphi$ multipliziert, Integrale von (13) sein müssen. Wir werden daher die Gleichung (52) mit $\sin \vartheta \sin \varphi$ multiplizieren und erhalten dann, wenn wir mit $A(\vartheta, \varphi)$ die Funktion $\sin \vartheta \sin \varphi \cdot \Theta(\vartheta, \varphi)$ bezeichnen, den Satz, daß gewisse Integrale der Differentialgleichung (13) folgende Integralgleichung befriedigen:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} A(\vartheta, \varphi) &= \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0 \\ &\quad \cdot e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \cdot A(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned} \right.$$

Fragen wir aber, welche Integrale von (13) dieser Integralgleichung genügen müssen, so erhalten wir zur Antwort: Diejenigen Integrale, die, durch $\sin \vartheta \sin \varphi$ dividiert immer noch auf einer Kugelfläche endlich, eindeutig und stetig bleiben. Nun sieht man aber sofort, daß diese Eigenschaften gerade den noch fehlenden beiden Lösungstypen zukommt.

Es ist leicht zu verifizieren, daß der Kern der Integralgleichung (53) aus dem der Integralgleichung (19) dadurch hervorgeht, daß man diesen nach φ_0 differentiirt und dann mit $-\frac{1}{i\omega k} \operatorname{tg} \varphi$ multipliziert:

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0 e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ &= -\frac{1}{i\omega k} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_0} (e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)}). \end{aligned}$$

Dadurch, daß wir diese Operation an der Reihe (28) ausführen, erhalten wir die Reihenentwicklung für

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0 e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ (54) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0 \cdot e^{i\omega (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ &= -\frac{1}{i\omega k} \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})^n} \\ &\cdot \left\{ \operatorname{tg} \varphi \sum_{m=1}^n m \cdot G_n^m(\cos \vartheta, k \sin \vartheta \cos \varphi) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin m \varphi_0 \right\}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Für die noch fehlenden beiden Typen machen wir die Ansätze:

$$(55) \quad U_{2p}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n B_{2n}^{2m} P_{2n}^{2m}(\cos \vartheta) \sin 2m \varphi \right)$$

$$(56) \quad U_{2p+1}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n B_{2n+1}^{2m} P_{2n+1}^{2m}(\cos \vartheta) \sin 2m \varphi \right)$$

und zeigen wie früher, daß

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{2n}^{2m} &= (-1)^{n+1} (4n+1) \cdot \frac{\lambda \cdot 2m}{i\omega k} \\ &\cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n}} \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \\ &\cdot G_{2n}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \\ &\cdot U_{2p}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{2n+1}^{2m} &= (-1)^{n+1} (4n+3) \cdot \frac{\lambda \cdot 2m}{\omega k} \\ &\cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi_{2n+1}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^{2n+1}} \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \\ &\cdot G_{2n+1}^{2m}(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) \\ &\cdot U_{2p+1}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned} \right.$$

ist. Die Richtigkeit der Ansätze (55) und (56) folgt dann noch daraus, daß die Integrale

$$(57a) \quad \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_n(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^n} \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \right. \\ \left. \cdot G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) U_{2,p}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \right.$$

$$(58a) \quad \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\psi_n(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})^n} \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \right. \\ \left. \cdot G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) U_{2,p+1}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \right.$$

verschwinden, wenn in (57a) $n = 2\sigma + 1$ und $m = 2\tau$ oder $m = 2\tau + 1$ bzw. $n = 2\sigma$ und $m = 2\tau + 1$ ist, oder entsprechend in (58a) $n = 2\sigma$ und $m = 2\tau$ oder $m = 2\tau + 1$ bzw. $n = 2\sigma + 1$ und $m = 2\tau + 1$ ist. Der Beweis für diese Behauptung ist ganz analog dem früher geführten, so daß er hier unterdrückt werden kann.

Schließlich ist auch in ganz der gleichen Weise, wie früher, der Konvergenzbeweis für die Reihen (55) und (56) durchzuführen. Auch dies soll hier unterlassen werden. Es ist zu diesem Zwecke nur zu bemerken, daß das Produkt

$$(59) \quad \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0),$$

wenn $m > 0$ ist (und nur solche treten in den hier betrachteten Reihen auf), endlich bleibt, weil für $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ die Größe $G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)$ mindestens wie $\cos \varphi_0$ verschwindet [vgl. die Gleichungen (27)]. Daraus folgt dann noch, daß (59) im Bereich der Variablen $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$; $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ ein Maximum besitzt, daß niemals größer ist als das von

$$G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0),$$

d. h. als Abschätzung für (59) können wir die auf S. 643 gegebene, für $G_n^m(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)$ gültige benutzen.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen den Beweis erbracht, daß es acht und nur acht voneinander verschiedene Typen für die Integrale der Differentialgleichung (13) geben kann. Wir werden uns nunmehr einer Methode zuwenden,

die uns in die Lage versetzt, für die Integrale von (13) angenäherte Ausdrücke zu geben, werden aber, um nachher prinzipielle Ausführungen nicht durch Nebenrechnungen unterbrechen zu müssen, einen Paragraphen einschieben, in dem einige Formeln entwickelt werden sollen, die dann zur numerischen Auswertung unerlässlich sind.

§ 9. Einige Hilfsformeln

Nach Heine¹⁾ ist es möglich, die Differentialquotienten der Kugelfunktionen als Entwicklungskoeffizienten einer bestimmten Potenzreihe darzustellen; und zwar sind die Differentialquotienten $\frac{d^\nu P_{n+\nu}(x)}{dx^\nu}$ die Entwicklungskoeffizienten folgender Funktion:

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{d^\nu P_{n+\nu}(x)}{dx^\nu}.$$

Nach der Definition von T ist sicher

$$\ln T = -\frac{2\nu+1}{2} \ln(1-2rx+r^2)$$

und daraus folgt durch Differentiation nach r :

$$(1-2rx+r^2) \frac{\partial T}{\partial r} + (2\nu+1)(r-x)T = 0.$$

Hier ersetzen wir nun T durch die Reihenentwicklung und ordnen nach steigenden Potenzen von r . Die Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn die Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden. Dies gibt eine Rekursionsformel für die Funktionen $\frac{d^\nu P_{n+\nu}(x)}{dx^\nu}$. Wir ersetzen dann noch n durch $n-\nu$ und beachten, daß der gleichen Rekursionsformel auch die Funktionen

$$P_n^\nu(x) = \sqrt{1-x^2}^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu}$$

genügen müssen. Wir finden:

$$(60) \quad \begin{cases} (2n+1) \cdot x \cdot P_n^\nu(x) = (n-\nu+1) P_{n+1}^\nu(x) + (n+\nu) P_{n-1}^\nu(x) \\ (2\nu+1) \cdot x \cdot P_\nu^\nu(x) = P_{\nu+1}^\nu(x), \end{cases}$$

wenn $n > \nu$.

1) E. Heine, a. a. O. I, S. 451 ff.

Durch nochmalige Anwendung dieser Formeln ergibt sich weiter:

$$x^2 P_n^v(x) = \frac{2 \binom{n-v+2}{2}}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^v(x) + \frac{2n^2-2v^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n^v(x) \\ + \frac{2 \binom{n+v}{2}}{4n^2-1} P_{n-2}^v(x) \quad n > v+1$$

$$x^2 P_{v+1}^v(x) = \frac{6}{(2v+3)(2v+5)} P_{v+3}^v(x) + \frac{3}{(2v+5)} P_{v+1}^v(x)$$

$$x^2 P_v^v(x) = \frac{2}{(2v+1)(2v+3)} P_{v+2}^v(x) + \frac{1}{(2v+3)} P_v^v(x).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen gelingt es dann, die Integrale

$$x_{n,m}^{v,j} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta P_n^v(\cos \vartheta) P_m^j(\cos \vartheta) \cos v \varphi \cos j \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

auszuwerten.

Von allen möglichen Größen $x_{n,m}^{v,j}$, die durch Variation des zweiten unteren und des zweiten oberen Index entstehen (wobei allerdings immer $j \leq m$ sein muß), sind nur die von Null verschieden, die erstens gleiche obere Indizes haben, und für deren untere Indizes eine der Gleichungen $m = n, n-2, n+2$ erfüllt ist. Wir erhalten¹⁾:

$$(60a) \quad \begin{cases} x_{n,n+2}^{v,v} = \frac{2}{(n-v)!} \frac{(n+v+2)! \pi}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}; \\ x_{n,n}^{v,v} = \frac{2(2n^2-2v^2+2n-1)(n+v)! \pi}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(n-v)!}; \\ x_{n,n-2}^{v,v} = \frac{2(n+v)! \pi}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(n-v-2)!}; \end{cases}$$

$$(60b) \quad x_{v+1,v+3}^{v,v} = \frac{2(2v+2)! \pi}{(2v+5)(2v+7)}; \quad x_{v+1,v}^{v,v} = \frac{6(2v+1)! \pi}{(2v+3)(2v+5)},$$

$$(60c) \quad x_{v,v+2}^{v,v} = \frac{2(2v+2)! \pi}{(2v+1)(2v+3)(2v+5)}; \quad x_{v,v}^{v,v} = \frac{2(2v)! \pi}{(2v+1)(2v+3)}.$$

1) Unter Beachtung der Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} P_{\kappa}^{\lambda}(x) P_{\mu}^{\lambda}(x) dx = 0,$$

wenn $\kappa \neq \mu$ und gleich $\frac{2}{2\kappa+1} \frac{(\kappa+\lambda)!}{(\kappa-\lambda)!}$, wenn $\kappa = \mu$.

In Heines Handbuch der Kugelfunktionen¹⁾ wird die Richtigkeit folgender Gleichung bewiesen:

$$\frac{d P_{n+1}(x)}{dx} - \frac{d P_{n-1}(x)}{dx} = (2n+1) P_n(x).$$

Aus ihr folgt durch ν -fache Differentiation und Multiplikation mit $\sqrt{1-x^2}^{\nu+1}$, wenn die Ungleichung $n > \nu + 1$ erfüllt ist:

$$(61) \quad (2n+1) \sqrt{1-x^2} P_n^\nu(x) = P_{n+1}^{\nu+1}(x) - P_{n-1}^{\nu+1}(x).$$

Ferner folgt, wenn $n > \nu + 3$ ist, die Gleichung:

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} (1-x^2) P_n^\nu(x) &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^{\nu+2}(x) \\ &- \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} P_n^{\nu+2}(x) + \frac{1}{4n^2-1} P_{n-2}^{\nu+2}(x). \end{aligned} \right.$$

Setzt man schließlich fest, man wolle unter $P_n^\nu(x)$ dann die Null verstehen, wenn der obere Index der Funktion größer als der untere ist, so gilt die Gleichung (62) ohne die durch die Ungleichung $n > \nu + 3$ eingeführte Beschränkung.

Jetzt sind wir in der Lage, die Integrale

$$\sigma_{n,m}^{\nu,j} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi P_n^\nu(\cos \vartheta) \cos \nu \varphi \\ \cdot P_m^j(\cos \vartheta) \cos j \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

zu berechnen. Dazu beachte man, daß die Gleichung

$$\cos^2 \varphi \cos \nu \varphi \cos j \varphi = \frac{1}{4} \{ \cos(\nu+1)\varphi + \cos(\nu-1)\varphi \} \\ \cdot \{ \cos(j+1)\varphi + \cos(j-1)\varphi \}$$

gilt, woraus geschlossen werden kann, daß die Größen $\sigma_{n,m}^{\nu,j}$ nur dann von Null verschieden sind, wenn für die oberen Indizes eine der Gleichungen $j = \nu, \nu+2; \nu-2$ erfüllt ist. Indem man die Integration über φ ausführt, gelangt man zu folgenden Integralen:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x) P_m^\nu(x) (1-x^2) dx; \quad \int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x) P_m^{\nu+2}(x) (1-x^2) dx; \\ \int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x) P_m^{\nu-2}(x) (1-x^2) dx.$$

1) E. Heine, a. a. O. I, S. 93.

Diese lassen sich mit Hilfe der Formeln (61) und (62) auf die Form

$$\int_{-1}^{+1} P_{\kappa}^{\lambda}(x) \cdot P_{\mu}^{\lambda}(x) dx$$

bringen, wo beide Kugelfunktionen die gleichen oberen Indizes haben. Solche Integrale wissen wir aber gemäß der Fußnote auf S. 658 zu berechnen.

Wenn wir noch als Definition einführen: wir wollen unter $\sigma_{n,m}^{v,j}$ die Null verstehen, sobald einer der beiden oberen Indizes (oder auch beide) größer wird als der unter ihm stehende, so können wir die gesuchten Größen $\sigma_{n,m}^{v,j}$, soweit eine der Gleichungen $j = v, v+2, v-2$ erfüllt ist, nur unter Beachtung dieser beiden Beschränkungen allgemein durch folgende Ausdrücke geben:

$$(63) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{n,n-2}^{v,v-2} &= \frac{\pi}{2} \frac{(n+v)!}{(4n^2-1)(2n-3)(n-v)!}; \\ \sigma_{n,n-2}^{v,v} &= -\pi \frac{(n+v)!}{(4n^2-1)(2n-3)(n-v-2)!}; \\ \sigma_{n,n-2}^{v,v+2} &= \frac{\pi}{2} \frac{(n+v)!}{(4n^2-1)(2n-3)(n-v-4)!}; \\ \sigma_{n,n}^{v,v-2} &= -\pi \frac{(n+v)!}{(4n^2-1)(2n+3)(n-v)!}; \\ \sigma_{n,n}^{v,v} &= \frac{\pi}{(2n+1)^2} \left\{ \frac{(n+v+2)!}{(2n+3)(n-v)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+v)!}{(2n-1)(n-v+2)!} \right\}; \\ \sigma_{n,n}^{v,v+2} &= -\pi \frac{(n+v+2)!}{(4n^2-1)(2n+3)(n-v-2)!}; \\ \sigma_{n,n+2}^{v,v-2} &= \frac{\pi}{2} \frac{(n+v)!}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(n-v)!}; \\ \sigma_{n,n+2}^{v,v} &= -\pi \frac{(n+v+2)!}{(2n+1)(2n+3)^2(n-v)!}; \\ \sigma_{n,n+2}^{v,v+2} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n+v+4)!}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(n-v)!}. \end{aligned} \right.$$

§ 10. Das Variationsproblem, das der Differentialgleichung (13) äquivalent ist

Wir betrachten das Integral

$$(64) \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left\{ (1-x^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 + (f(x, \varphi))^2 \cdot \omega^2 \cdot [x^2 + k^2(1-x^2) \cos^2 \varphi] \right\} dx d\varphi \right.$$

und suchen die in diesem vorkommende, zunächst willkürliche Funktion $f(x, \varphi)$ so zu bestimmen, daß das Integral (64) einen Extremwert annimmt, indem wir gleichzeitig der Funktion $f(x, \varphi)$ die Nebenbedingung

$$(65) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} (f(x, \varphi))^2 dx d\varphi = 1$$

auferlegen. Dieses Variationsproblem mit Nebenbedingung läßt sich bekanntlich durch ein gewöhnliches ersetzen, nämlich durch das folgende:

$$(66) \left\{ \delta I = \delta \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left\{ (1-x^2) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{1-x^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (f(x, \varphi))^2 \omega^2 \cdot (x^2 + k^2(1-x^2) \cos^2 \varphi) + (f(x, \varphi))^2 E' \right\} dx d\varphi = 0, \right.$$

in dem E' ein noch zu bestimmender Parameter ist.

In bekannter Weise zeigt man durch partielle Integration, daß δI folgendem Ausdruck gleich wird:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^{2\pi} \left[(1-x^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta f \right]_{x=-1}^{x=+1} d\varphi + \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1-x^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \delta f \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ & - \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} dx \cdot d\varphi \cdot \delta f(x, \varphi) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - f(x, \varphi) (\omega^2 [x^2 + k^2(1-x^2) \cos^2 \varphi] + E') \right], \end{aligned}$$

so daß wir für das Verschwinden von δI zwei Bedingungen finden, die gleichzeitig erfüllt sein müssen: Erstens hat $f(x, \varphi)$ der Differentialgleichung

$$(67) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^3 f}{\partial \varphi^3} \\ & - f(\omega^2 [x^2 + k^2(1-x^2) \cos^2 \varphi] + E') = 0 \end{aligned} \right.$$

zu genügen. Dies ist aber nichts anderes als die Differentialgleichung (13), in der nur an die Stelle von $\cos \vartheta$ die Größe x gesetzt wurde. Die zweite Bedingung ist die, daß die einfachen Integrale

$$\int_0^{2\pi} \left[(1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \delta f \right]_{x=-1}^{x=+1} d\varphi; \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1-x^2} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta f \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

verschwinden. Dieser Bedingung wird aber Genüge geleistet, wenn die Funktion $f(x, \varphi)$ endlich, eindeutig und stetig für $-1 \leq x \leq +1$ und periodisch in φ von der Periode 2π ist. Daher ist die Gleichung (64) mit dem in dieser Arbeit an die Differentialgleichung (13) anknüpfenden Randwertproblem identisch. Wir werden für $f(x, \varphi)$ einen der Ansätze machen, deren Existenz wir in den §§ 7 und 8 erwiesen haben. Da der hier einzuschlagende Weg wesentlich unabhängig davon ist, welcher der acht verschiedenen Typen der Betrachtung zugrunde gelegt wird, wählen wir zur Veranschaulichung der folgenden Methode die durch die Gleichung (31) dargestellte Funktion, der als Typ der Bezeichnung $R_{2n}(\vartheta, \varphi)$ zukommt. Wir werden jedoch eine kleine Abänderung vornehmen, indem wir schreiben:

$$(68) \quad R_{2n}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\tau=0}^{\tau=N} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=\tau} A_{2\tau}^{2\nu} P_{2\tau}^{2\nu}(\cos \vartheta) \cos 2\nu \varphi \right).$$

Hier haben wir an die Stelle der Grenze ∞ für die über τ zu erstreckende Summe die Zahl N gesetzt. Über N wollen wir nichts voraussetzen; zunächst sei N nur eine sehr große Zahl, die nicht weiter beschränkt ist. Wir entgehen durch diese Festsetzung der Notwendigkeit von Konvergenzbetrachtungen für eine im folgenden aufzustellende Determinante. Wir können hinterher zeigen, daß die erhaltenen Ergebnisse von der Größe der Zahl N vollkommen unabhängig sind, woraus dann hervorgeht, daß N über alle Grenzen wachsen darf, ohne daß dadurch die angestellten Überlegungen hinfällig werden.

Setzen wir jetzt (68) in (64) ein, so wird das Integral I eine Funktion lediglich der zunächst willkürlichen Koeffi-

zienten $A_{2\tau}^{2\nu}$. Da (64) einen Extremwert haben soll, haben wir auf die Funktion $I(A_0^0, A_2^0, A_4^0, A_6^0 \dots)$ die Regeln der Differentialrechnung anzuwenden, also die Gleichungen

$$(69) \quad \frac{\partial I}{\partial A_{2\tau}^{2\nu}} = 0$$

zu bilden. Die Anzahl dieser Gleichungen ist gerade der Anzahl aller vorhandenen $A_{2\tau}^{2\nu}$ gleich, so daß die $A_{2\tau}^{2\nu}$ aus diesen Gleichungen sich berechnen lassen werden. Die Gleichungen (70) lassen sich in folgender Form darstellen:

$$(70) \quad \left\{ \sum_{m=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^m A_{2m}^{2j} (\Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} + \omega^2 [\kappa_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} + k^2 \sigma_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}] + \Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} \cdot E^\nu) \right\} = 0; \nu \leq \tau = 1, 2, 3 \dots N, \right.$$

wo

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_{2\tau}^{2\nu}(x) \cos 2\nu\varphi P_{2m}^{2j}(x) \cos 2j\varphi dx d\varphi \\ &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } \tau \neq m \quad \nu \neq j, \\ \frac{2\pi}{4\tau+1} \frac{(2\tau+2\nu)!}{(2\tau-2\nu)!} & \text{wenn } \begin{matrix} \tau = m \\ \nu = j \end{matrix}; \nu \neq 0, \\ \frac{4\pi}{4\tau+1} & \text{wenn } \begin{matrix} \tau = m \\ \nu = j = 0 \end{matrix} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Für die Größen $\Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ ergeben sich die Gleichungen

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left\{ (1-x^2) \frac{\partial P_{2\tau}^{2\nu}}{\partial x} \cdot \frac{\partial P_{2m}^{2j}}{\partial x} \cos 2\nu\varphi \cdot \cos 2j\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\nu j}{1-x^2} P_{2\tau}^{2\nu}(x) P_{2m}^{2j}(x) \sin 2\nu\varphi \sin 2j\varphi \right\} dx d\varphi, \end{aligned} \right.$$

während die $\kappa_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ und $\sigma_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ durch die Gleichungen (60), (60a), (60b), bzw. durch (63) gegeben sind.

Indem wir an den Gleichungen (72) die Integration nach φ ausführen, sehen wir, daß nur diejenigen Koeffizienten von Null verschieden sein können, deren obere Indizes einander gleich sind. Wir erhalten so die möglicherweise von Null verschiedenen $\Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ durch die Gleichung:

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2\nu} &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \cdot \left\{ \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \frac{dP_{2\tau}^{2\nu}}{dx} \cdot \frac{dP_{2m}^{2\nu}}{dx} dx \right. \\ &\quad \left. - 4 \cdot \nu^2 \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2\tau}^{2\nu}(x) \cdot P_{2m}^{2\nu}(x) dx}{1-x^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das erste der beiden Integrale integrieren wir partiell und erhalten:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1-x^2) \frac{dP_{2\tau}^{2\nu}}{dx} \cdot \frac{dP_{2m}^{2\nu}}{dx} dx \\ &= - \int_{-1}^{+1} P_{2m}^{2\nu}(x) \cdot \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_{2\tau}^{2\nu}}{dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß die Zugeordneten der Kugelfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_{2\tau}^{2\nu}}{dx} \right) = - \left[2\tau(2\tau+1) - \frac{4\nu^2}{1-x^2} \right] P_{2\tau}^{2\nu}(x)$$

genügen, so sieht man leicht, daß sich die $\Theta_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu}$ von den $\Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu}$ nur durch den Faktor $2\tau(2\tau+1)$ unterscheiden¹⁾:

$$(74) \quad \Theta_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu} = 2\tau(2\tau+1) \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu}.$$

Bezeichnen wir ferner mit $a_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ die Größen $\kappa_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} + k^2 \sigma_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$, so führt die Lösung der linearen Gleichungen (71) auf die Determinante, die auf der folgenden Seite dargestellt ist. In dieser Determinante ist jede Zeile und jede Kolonne durch ein Indexduo gekennzeichnet. Die Ordnung der Reihen und Kolonnen in (75) ist so vorgenommen, daß alle Zeilen bzw. Kolonnen mit dem unteren Index 2τ vor den Zeilen bzw. Kolonnen angeordnet sind, deren unterer Index größer ist als 2τ . Ebenso sind Zeilen bzw. Kolonnen, die gleiche untere Indizes haben, nach der Größe der oberen Indizes geordnet. Die Koeffizienten $a_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j}$ sind symmetrisch insofern, als man das erste Indexduo mit dem zweiten vertauschen darf, ohne daß die Koeffizienten ihren Wert ändern. Es ist also $a_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2j} - a_{2m, 2\tau}^{2j, 2\nu} = 0$, woraus folgt, daß (75) eine symmetrische Determinante ist.

1) Die $\Theta_{2\tau, 2m}^{2\nu, 2\nu}$ mit verschiedenen unteren Indizes verschwinden wegen der Orthogonalität der $P_n^\nu(x)$ mit gleichem oberem Index. Vgl. Fußnote S. 658.

Das Gleichungssystem (69) ist linear und homogen. Daher gibt es dann nur von Null verschiedene Werte der A_{2r}^{2r} , die die Gleichungen (71) lösen, wenn die Determinante (75) verschwindet. Die einzige in (75) vorkommende Größe, deren Wert zahlenmäßig noch nicht eindeutig festgelegt ist, ist die Größe E . Daher haben wir E so zu bestimmen, daß die Determinante verschwindet. Man sieht sofort, daß die Gleichung, durch die E bestimmt wird, eine sogenannte Säkulargleichung ist, deren Wurzeln alle reell sind, da die Determinante (75) symmetrisch ist.

Die Determinante (75) ist eine Funktion von ω^2 . Die durch das Verschwinden der Determinante bestimmten Werte von E werden daher im allgemeinen auch Funktionen von ω^2 ; es liegt nahe, für E einen Reihenansatz mit unbestimmten Koeffizienten zu machen, indem wir schreiben:

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} E' &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \omega^2 + \varepsilon_2 \omega^4 \\ &\quad + \varepsilon_3 \omega^6 + \dots \end{aligned} \right.$$

Auch die Determinante wird eine Reihenentwicklung nach Potenzen von ω^2 gestatten, um deren Konvergenz wir uns nicht zu kümmern brauchen, da die Determinante gemäß den über die Zahl N gemachten Voraussetzungen endlich ist; aus der speziellen Form der Abhängigkeit der einzelnen Glieder der Determinante (75) von ω^2 folgt dann, daß auch die Potenzreihe endlich sein muß. In bekannter Weise ist:

$$(75) \quad D = \begin{vmatrix} \Omega_{00}^{00} E + \omega^2 a_{00}^{00} & \omega^2 a_{02}^{00} & \omega^2 a_{04}^{00} & \dots & \omega^2 a_{04}^{02} & \dots \\ \omega^2 a_{20}^{00} & \Omega_{22}^{00} (6 + E) + \omega_{22}^{200} & \omega^2 a_{22}^{00} & \dots & \omega^2 a_{24}^{00} & \dots \\ \omega^2 a_{20}^{20} & \Omega_{22}^{20} (6 + E) + \omega^2 a_{22}^{22} & \omega^2 a_{22}^{20} & \dots & \omega^2 a_{24}^{20} & \dots \\ \omega^2 a_{40}^{00} & \omega^2 a_{42}^{00} & \Omega_{44}^{00} (20 + E) + \omega^2 a_{44}^{00} & \dots & \omega^2 a_{44}^{02} & \dots \\ \omega^2 a_{40}^{20} & \omega^2 a_{42}^{20} & \Omega_{44}^{20} (20 + E) + \omega^2 a_{44}^{20} & \dots & \omega^2 a_{44}^{22} & \dots \end{vmatrix}$$

$$(77) \quad D = (D)_{\omega=0} + \sum_{e=1}^Q \frac{\omega^{2e}}{e!} \left(\frac{d^e D}{d(\omega^2)^e} \right)_{\omega=0},$$

wo Q eine sehr große Zahl ist, die wir hier nicht näher berechnen wollen, die sich aber in eindeutiger Weise aus der Zahl N herleiten läßt, ebenso wie N eindeutig aus Q berechnet werden kann.

Die Determinante (75) soll für in gewissen Grenzen beliebige Werte von ω^2 verschwinden. Dies ist nur dann möglich, wenn in der Reihenentwicklung (77) jeder Koeffizient für sich verschwindet. Wir bilden daher zunächst $(D)_{\omega=0}$ und suchen die Nullstellen dieser Funktion. Aus (75) folgt sofort, daß alle Elemente, mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale, verschwinden, wenn wir ω gleich Null setzen. Man kann diese Determinante dann gleich in Form eines Produktes schreiben:

$$(78) \quad (D)_{\omega=0} = \prod_{\substack{\nu \leq \tau}}^N \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu} \cdot \prod_{\tau=0}^N [2\tau(2\tau+1) + \varepsilon_0]^{\tau+1}.$$

Aus dieser ersieht man dann sofort, daß der von ω^2 freie Koeffizient in (76) den Wert

$$(78a) \quad \varepsilon_0 = -2\tau(2\tau+1) \quad \tau = 0, 1, 2, 3 \dots N$$

hat. Auch sieht man, daß diese Nullstelle $(\tau+1)$ -fach ist. Es gibt also $\tau+1$ linear unabhängige Lösungen von (71), und damit mindestens $\tau+1$ linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung (13) vom Typus $R_{2\tau}(\vartheta, \varphi)$, wofern der Koeffizient ε_0 von (76) gemäß (78a) gewählt wird.

Das jetzt erhaltene Ergebnis setzt uns in den Stand, nähere Festsetzungen zu treffen über die Indizes, die wir den Funktionen $R(\vartheta, \varphi)$, $S(\vartheta, \varphi)$, $T(\vartheta, \varphi)$, $U(\vartheta, \varphi)$ geben wollen. Bisher haben wir nur zwischen geraden und ungeraden Indizes unterschieden, ohne nähere Eigenschaften unserer Funktionen angeben zu können, mit deren Hilfe eine Klassifikation möglich wäre. Jetzt aber können wir zeigen, daß die unserer Funktionen $R(\vartheta, \varphi)$, die dem Werte $\varepsilon_0 = -2\tau(2\tau+1)$ entsprechen, für verschwindendes ω in Kugelflächenfunktionen vom Grade 2τ übergehen. Man sieht dies sofort, wenn man in der Differentialgleichung (13) $\omega = 0$ setzt. Auch von E' bleibt dann nur das von ω^2 freie Glied übrig, das, wie wir hier zeigen konnten,

gerade den Wert hat, der nötig ist, damit die Integrale von (13) Kugelflächenfunktionen vom Grade 2τ werden. Wir setzen nun fest, daß unsere Funktionen R, S, T, U dann den Index m haben sollen, wenn sie sich für $\omega = 0$ auf Kugelflächenfunktionen vom Grade m reduzieren. Die Mehrdeutigkeit dieser Festsetzung werden wir durch Einführung eines zweiten Index erst etwas später beseitigen.

Wir setzen jetzt den für ε_0 gefundenen Wert in die Determinante D [Gleichung (75)] ein. Dies hat zur Folge, daß in den Hauptdiagonalgliedern, die den unteren Index 2τ haben, sich die konstanten, d. h. von ω^2 freien Glieder wegheben. Es gibt somit $\tau + 1$ Zeilen bzw. Kolonnen in der Determinante, in denen jedes Glied mindestens mit ω^2 multipliziert ist. Daher können wir sicher die Potenz $\omega^{2\tau+2}$ vor die Determinante ziehen. Weil aber die Determinante D , wenn ε_0 nach (78a) bestimmt ist, eine Potenzreihe nach ω^2 gestattet, deren konstantes Glied Null ist, so ist zu schließen, daß wenn

$\varepsilon = -2\tau(2\tau + 1)$ ist, alle $\left(\frac{\partial^q D}{\partial (\omega^2)^q} \right)_{\omega=0}$, wofern q kleiner als $\tau + 1$ ist, verschwinden müssen. Von Null verschieden ist erst die Ableitung $\left(\frac{\partial^{\tau+1} D}{\partial (\omega^2)^{\tau+1}} \right)_{\omega=0}$. Diese betrachten wir zunächst.

Unter $D_{j_1, j_2, j_3 \dots j_k}^{m_1, m_2, m_3 \dots m_k}$ wollen wir die Determinante verstehen, die aus D hervorgeht, wenn wir in D die Zeilen bzw. Kolonnen mit den Indexduos $\begin{matrix} j_1, j_2, j_3 \dots j_k \\ m_1, m_2, m_3 \dots m_k \end{matrix}$ (unter denen auch mehrere oder alle gleich sein können) nach ω^2 differenzieren. Mit dieser Bezeichnung läßt sich dann der $\tau + 1$ -te Differentialquotient von D nach ω^2 durch die Summe $\sum D_{j_1, j_2 \dots j_{\tau+1}}^{m_1, m_2 \dots m_{\tau+1}}$ ausdrücken, wo über alle möglichen Indexduokombinationen zu summieren ist. Unter allen diesen Summanden ist aber im wesentlichen nur ein einziger, der für $\omega = 0$ nicht verschwindet. Dies sieht man so ein:

Wenn eine oder auch mehrere derjenigen Kolonnen, die den unteren Index 2τ haben, nicht ein einziges Mal differenziert ist, so enthält sie, wofern ε_0 nach (78a) bestimmt wurde, nur Elemente, die mindestens mit ω^2 multipliziert sind. Setzen wir aber ω gleich Null, so enthalten alle diese

Determinanten mindestens eine Kolonne, in der alle Glieder Null sind. Diese Determinanten verschwinden also mit ω . Alle anderen Determinanten, bei denen alle Kolonnen mit dem unteren Index 2τ nach ω^2 differenziert sind, sind aber untereinander gleich. Setzen wir $\omega = 0$, so haben diese Determinanten folgendes Aussehen: Die Elemente der Hauptdiagonale, die den unteren Index 2τ nicht haben, sind von ω frei, und eindeutig bestimmt, die anderen Elemente, deren beide unteren Indizes nicht 2τ sind, sind Null. Die Hauptdiagonalelemente mit den unteren Indizes 2τ sind die Größen $a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau} + \varepsilon_1 \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau}$. Die anderen Elemente, deren beide untere Indizes 2τ sind, sind die Größen $a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2j}$. Alle die Summanden, die für $\omega = 0$ von Null verschieden zu dem Werte von

$\left(\frac{d^{r+1}D}{d(\omega^2)^{r+1}} \right)_{\omega=0}$ beitragen, haben also die Form:

$$A = \text{const.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2\tau, 2\tau}^{0, 0} + \varepsilon_1 \Omega_{2\tau, 2\tau}^{0, 0} & a_{2\tau, 2\tau}^{0, 2} & a_{2\tau, 2\tau}^{0, 4} \dots a_{2\tau, 2\tau}^{0, 2\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2\tau, 2\tau}^{2, 0} & a_{2\tau, 2\tau}^{2, 2} + \varepsilon_1 \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2, 2} & a_{2\tau, 2\tau}^{2, 4} \dots a_{2\tau, 2\tau}^{2, 2\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 0} & a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2} & \dots & a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau} + \varepsilon_1 \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (79a)$$

Diese Determinante entwickeln wir nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz, und zwar nach den Determinanten, die aus den Zeilen mit dem unteren Index 2τ gebildet werden können. Man sieht sofort, daß aus den betrachteten Zeilen dieser Determinante nur eine Determinante gebildet werden kann, die von Null verschieden ist. Diese besteht gerade aus den Elementen, deren beide untere Indizes gleich sind. Damit reduziert sich also die Bedingung, daß $\left(\frac{d^{r+1}D}{d(\omega^2)^{r+1}} \right)_{\omega=0}$ verschwinden sollen, auf die, daß die Gleichung

$$(79) \begin{vmatrix} a_{2\tau, 2\tau}^{0, 0} + \Omega_{2\tau, 2\tau}^{0, 0} \cdot \varepsilon_1; & a_{2\tau, 2\tau}^{0, 2}; & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 0}; & \dots & a_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau} + \Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\tau, 2\tau} \cdot \varepsilon_1 \end{vmatrix} = 0$$

gelten soll. Dies ist eine Säkulargleichung vom Grade $\tau + 1$ zur Berechnung von ε_1 .

Wir zeigen jetzt, daß die Wurzeln der Gleichung (79) alle voneinander verschieden sind. Daß die Wurzeln alle reell sind, folgt einfach aus der Tatsache, daß die Determinante (79) symmetrisch ist; außerdem hatten wir schon nachweisen können, daß die Größe E' als Wurzel der Gleichung (75) reell sein muß.

Wir bemerken, daß die Elemente $a_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2j}$, aus denen sich die Determinante (79) aufbaut, nur dann von Null verschieden sein können, wenn die Differenz der oberen Indizes gleich Null oder 2 ist. Diese Behauptung folgt sofort aus den Gleichungen (60), (60a), (60b) und (63). Zur Abkürzung wollen wir die Glieder der Diagonalfolge von (79), $a_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu}$, mit ϑ_ν , die Größen $a_{2\tau, 2\tau}^{2\nu+2, 2\nu} = a_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu+2}$ mit c_ν und $\Omega_{2\tau, 2\tau}^{2\nu, 2\nu}$ mit p_ν bezeichnen. Dann läßt sich (79) in folgender Form schreiben:

$$(79a) \quad \begin{vmatrix} \vartheta_0 + p_0 \cdot \varepsilon_1 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_0 & \vartheta_1 + p_1 \cdot \varepsilon_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \vartheta_2 + p_2 \cdot \varepsilon_1 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\tau-2} & \vartheta_{\tau-1} + p_{\tau-1} \cdot \varepsilon_1 & c_{\tau+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{\tau+1} & \vartheta_\tau + p_\tau \cdot \varepsilon_1 \end{vmatrix} = 0$$

Diejenige Determinante, die aus dieser $(\tau + 1)$ -reihigen durch Streichung der m letzten Zeilen und m letzten Kolonnen entsteht, wollen wir mit $W_{\tau-m+1}$ bezeichnen. Man erkennt dann leicht, daß, wenn W_s nach seiner letzten Zeile oder Kolonne entwickelt wird, sich folgende Rekursionsformel ergibt:

$$(80) \quad W_s = (\vartheta_{s-1} + p_{s-1} \cdot \varepsilon_1) W_{s-1} - (c_{s-2})^2 \cdot W_{s-2};$$

$$s = 1, 2, 3 \dots \tau + 1.$$

Wir setzen fest, W_0 sei 1, W_{-1} sei Null.

Die Funktionen W_s sind in bezug auf ε_1 rational und ganz vom Grade s . Wir betrachten jetzt die Nullstellen dieser Funktionen und leiten aus der Darstellung (80) drei einfache Eigenschaften dieser Funktionenfolge her: Erstens kann W_s und W_{s-1} keine Nullstelle gemeinsam haben. Denn gäbe es einen Wert von ε_1 , für den sowohl W_s als auch W_{s-1} verschwinden würde, so müßte auch an dieser Stelle W_{s-2} ,

damit dann $W_{s-3}, W_{s-4} \dots W_0$ verschwinden; dies aber verstößt gegen die Voraussetzung $W_0 = 1$. Zweitens, da $(c_{s-2})^3$ eine stets positive GröÙe ist, haben W_s und W_{s-2} verschiedenes Vorzeichen, wenn W_{s-1} verschwindet. Drittens folgt daraus, daß die Funktionen W_s ganz und rational vom Grade s in ε_1 sind: Für sehr große negative Werte von ε_1 nehmen die Funktionen W_s positive oder negative Werte an, je nachdem s gerade oder ungerade ist. Für sehr große positive Werte von ε_1 sind alle Funktionen W_s positiv.

Wir wollen annehmen, W_{s-2} habe Nullstellen, die alle voneinander verschieden sind; sie seien, der GröÙe nach geordnet, mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{s-2}$ bezeichnet. Auch W_{s-1} habe nur voneinander verschiedene Nullstellen, für die gelten soll: $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_{s-1}$. Schließlich sei angenommen, daß zwischen je zwei Nullstellen von W_{s-1} eine, und nur eine Nullstelle von W_{s-2} liege. Es sollen also die Ungleichungen

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < \dots < \beta_{s-3} < \alpha_{s-2} < \beta_{s-1}$$

erfüllt sein. Unter diesen Voraussetzungen hat dann auch W_s nur voneinander verschiedene Nullstellen, und zwischen je zwei Nullstellen von W_s liegt nur eine Nullstelle von W_{s-1} . Die Richtigkeit dieses Satzes ist so einzusehen: Für negative sehr große Werte von ε_1 haben W_s und W_{s-2} gleiches Vorzeichen. Für $\varepsilon_1 = \beta_1$, also an der ersten Nullstelle von W_{s-1} , sollen W_s und W_{s-2} verschiedene Vorzeichen haben, was nur möglich ist, wenn W_s eine Nullstelle hat, die kleiner ist als die kleinste Nullstelle von W_{s-1} . Zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle von W_{s-1} geht W_{s-2} voraussetzungsgemäß durch Null, wechselt also sein Zeichen; daher muß auch W_s in diesem Intervall sein Zeichen einmal wechseln usw. Auf diese Weise sieht man sofort die Richtigkeit der eben aufgestellten Behauptung.

Jetzt beachten wir nur noch, daß die Voraussetzungen des Satzes für $s = 3$ erfüllt sind. Denn W_1 ist eine lineare Funktion, die für große negative Werte von ε_1 negativ ist, für große positive Werte jedoch positiv. An der Nullstelle von W_1 muß W_2 negativ sein, weil $W_0 = 1$ positiv ist. Da ferner für sehr große negative wie positive Werte von ε_1 die Funktion W_2 positiv wird, muß es für W_2 zwei Nullstellen geben,

zwischen denen die eine Nullstelle von W_1 liegt. Aus diesem Ergebnis folgt zunächst, daß auch W_3 nur verschiedene Nullstellen hat, und daß die Nullstellen von W_2 zwischen denen von W_3 liegen. So schließt man weiter und findet schließlich, daß die Nullstellen von $W_{\tau+1}$, d. h. der Säkulargleichung (79) alle verschieden sind.

Die Wurzeln der Gleichung (79) können wir der Größe nach ordnen und bezeichnen die an m -ter Stelle stehende Wurzel mit $\varepsilon_1^{m-1}(\tau)$. Durch diese Festsetzung sind wir in der Lage, die früher unterlassene nähere Klassifizierung unserer Funktionen $R(\vartheta, \varphi)$, $S(\vartheta, \varphi)$, $T(\vartheta, \varphi)$, $U(\vartheta, \varphi)$ durchzuführen. Wir hatten bisher nur festgesetzt, unsere Funktionen sollen als Index den haben, der den Grad der Kugelfunktion angibt, auf die sie sich für $\omega = 0$ reduzieren. Die Unbestimmtheit, die in der Existenz einer gewissen Anzahl linear unabhängiger Kugelfunktionen von gleichem Grade liegt, wußten wir zunächst nicht zu beheben. Jetzt setzen wir fest, daß die Integrale von (13) einen zweiten Index erhalten, der durch ein Komma getrennt, neben den ersten gesetzt wird. Dieser Index soll übereinstimmen mit dem Index, den wir der Größe $\varepsilon_1^{m-1}(\tau)$, zu der das betreffende Integral gehört, geben. Mit anderen Worten: Wir suchen unter den $\tau + 1$ -Wurzeln der Gleich. (79) eine aus, z. B. $\varepsilon_1^{m-1}(\tau)$, nehmen ferner an, wir hätten das Integral, das unter Benutzung der Größe

$$E' = -2\tau(2\tau + 1) + \omega^2 \cdot \varepsilon_1^{m-1}(\tau) + \omega^4 \cdot \varepsilon_2 + \dots$$

der Differentialgleichung (13) genügt; dann haben wir dem vorliegenden Integral als ersten Index die Zahl (2τ) , als zweiten Index die Zahl $m - 1$ zu erteilen; das Integral hat also die Bezeichnung $R_{2\tau, m-1}(\vartheta, \varphi)$. Allerdings wissen wir noch nicht, ob zu einem bestimmten Wert von τ und zu einer bestimmten Wurzel $\varepsilon_1^{m-1}(\tau)$ wirklich nur je ein Wert der noch nicht bestimmten Größen $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \dots$ usf. gehört. Erst wenn wir zeigen können, daß dies der Fall ist, ist die von uns vorgenommene Indexbezeichnung eindeutig.

Um den Beweis, dessen Notwendigkeit wir eben angedeutet haben, möglichst übersichtlich durchführen zu können, wollen wir eine neue Determinante einführen. Wir erhalten sie aus der Determinante (75), indem wir dort alle Zeilen und Kolonnen

streichen, deren unterer Index kleiner oder gleich $2\tau - 4$ ist, ebenso alle Zeilen und Kolonnen, deren unterer Index größer oder gleich $2\tau + 4$ ist. (Es sei noch einmal darauf verwiesen, daß in der Determinante eine Zeile oder Kolonne erst durch Angabe zweier Indizes bestimmt ist.) In der hierdurch entstehenden Determinante differenzieren wir noch die Kolonnen, deren unterer Index 2τ ist, nach ω^3 . Die so erhaltene $(3\tau + 3)$ -reihige Determinante bezeichnen wir mit Δ und nennen sie die reduzierte Determinante.

Wir hatten bisher gezeigt, daß aus der Bedingung $D = 0$ die Gleichungen

$$(D)_{\omega=0} = 0; \quad \left(\frac{d^e D}{d(\omega^3)^e} \right)_{\omega=0} = 0$$

folgten, von denen die Gleichungen $\left(\frac{d^e D}{d(\omega^3)^e} \right)_{\omega=0} = 0$; $e \leq \tau$ dann von selbst erfüllt waren, wenn wir $\epsilon_0 = -2\tau(2\tau + 1)$ setzten. Die Gleichung $\left(\frac{d^{\tau+1} D}{d(\omega^3)^{\tau+1}} \right)_{\omega=0} = 0$ führte auf die Säkulargleichung (79) und lieferte uns die Bestimmung von ϵ_1 . Wir wollen jetzt untersuchen, was aus der Bedingung

$$\left(\frac{d^{\tau+2} D}{d(\omega^3)^{\tau+2}} \right)_{\omega=0} = 0$$

gefolgt werden kann.

Die Gleichung $\left(\frac{d^{\tau+2} D}{d(\omega^3)^{\tau+2}} \right)_{\omega=0} = 0$ läßt sich mit Hilfe des von uns früher eingeführten Symbols $D^{j_1; j_2; \dots; j_k}_{n_1; n_2; \dots; n_k}$ schreiben als Summe solcher Determinanten:

$$\left(\sum D^{j_1; j_2; j_3; \dots; j_{\tau+2}}_{n_1; n_2; n_3; \dots; n_{\tau+2}} \right)_{\omega=0} = 0,$$

wo über alle möglichen Indexduokombinationen zu summieren ist. Vorweg betrachten wir alle diejenigen Determinanten der Summe, in denen mindestens eine Kolonne mit dem unteren Index 2τ nicht differenziert ist. Man sieht sofort, daß, wenn ϵ_0 nach (78a) bestimmt ist, diese Determinanten mit ω verschwinden. Unter den übrig bleibenden wollen wir zwei Fälle unterscheiden: Außer den Kolonnen mit dem unteren Index 2τ ist noch eine Kolonne differenziert, deren unterer Index kleiner

oder gleich $2\tau - 4$ oder größer oder gleich $2\tau + 4$ ist. Wir wollen diesen Fall charakterisieren, indem wir sagen, die Differentiation sei außerhalb des reduzierten Schemas vorgenommen. Der zweite Fall ist dann der, in dem die Differentiation innerhalb des reduzierten Schemas vorgenommen ist. Jetzt beachte man, daß die Elemente $a_{2n, 2m}^{2\nu, 2j}$ der Determinante nur dann von Null verschieden sind, wenn die Differenz ihrer unteren Indizes Null oder zwei ist. (Genau das gleiche Gesetz gilt auch für die oberen Indizes.) Wenn nun eine Kolonne außerhalb des reduzierten Schemas differentiiert ist, so sind die Elemente, die diese Kolonne mit den Zeilen vom unteren Index 2τ gemeinsam hat, sicher Null. Wenn wir nun $\omega = 0$ setzen, so sind die einzigen Elemente der Zeilen mit dem Index 2τ , die von Null verschieden sind, gerade die Elemente der Säkulargleichung (79). Man kann dann die Determinante nach Laplace entwickeln und findet als Ergebnis das Produkt zweier Determinanten, von denen die eine die Säkulardeterminante (79) ist. Die Größe ε_1 war aber als Wurzel dieser Gleichung bestimmt, so daß also alle Determinanten, die zum ersten Fall gehören, verschwinden müssen.

Alle anderen Determinanten aber, die zum zweiten Fall gehören, haben die Eigenschaft gemeinsam, daß alle Elemente außerhalb des reduzierten Schemas Null werden, mit Ausnahme der Diagonalelemente, die bestimmte, hier nicht näher interessierende Werte annehmen. Man kann daher die Determinanten sehr leicht entwickeln und findet außer einem konstanten Faktor, der das Produkt aller nicht zum reduzierten Schema gehörenden Diagonalkonstanten ist, den ersten Differentialquotienten nach ω^2 der reduzierten Determinante Δ für $\omega = 0$:

$$(81) \quad \left(\frac{d\Delta}{d(\omega^2)} \right)_{\omega=0} = 0.$$

Die Gleichung (81) zerfällt in eine Summe von Determinanten, von denen jede aus Δ durch Differentiation einer Zeile entsteht. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle. 1. Fall: Die Differentiation ist an einer der Kolonnen ausgeführt, die Elemente der Säkulargleichung enthält. Die Elemente dieser Kolonnen sind konstant, mit Ausnahme der Diagonalglieder, die noch von ω^2 abhängen. Die Differentiation macht also

alle Elemente zu Null, mit Ausnahme der Diagonalglieder. Wenn man $\omega = 0$ gesetzt hat, ist hier allein die Größe ε_2 vorhanden. Damit ist gezeigt, daß es $\tau + 1$ Summanden gibt, die die Größe ε_2 einmal als Faktor enthalten. Die Differentiation an Kolonnen, die keine Glieder der Säkulardeterminante enthalten, und dies ist der 2. Fall, ergeben Determinanten, in denen, wenn wir $\omega = 0$ setzen, die Größen $\varepsilon_2; \varepsilon_3; \varepsilon_4 \dots$ überhaupt nicht vorkommen. Wir haben somit zur Bestimmung von ε_2 eine lineare inhomogene Gleichung, deren Koeffizienten, wie man leicht sieht, eindeutige Funktionen von τ und $\varepsilon_1^{m-1}(\tau)$ sind. Daher existiert zu jedem Wertepaar $\tau; \varepsilon_1^{m-1}(\tau)$ ein und nur ein Wert von ε_2 .

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$\left(\frac{d^{\tau+3} D}{d(\omega^2)^{\tau+3}} \right)_{\omega=0} = 0.$$

Diese werden wir wieder mit Hilfe des früher eingeführten Symbols als eine Summe von Determinanten schreiben:

$$\left(\sum D^{j_1; j_2; j_3 \dots j_{\tau+3}}_{n_1; n_2; n_3 \dots n_{\tau+3}} \right)_{\omega=0} = 0.$$

Man sieht wie vorher ein, daß die Determinanten, in denen eine Kolonne mit dem unteren Index 2τ nicht differenziert ist, für $\omega = 0$ verschwinden muß. Unter den übrig bleibenden werden drei Fälle zu unterscheiden sein:

1. Fall: Zwei Kolonnen außerhalb des reduzierten Schemas sind differenziert, wobei auch der Fall, daß eine Kolonne außerhalb des reduzierten Schemas zweimal differenziert ist, hierher gehört.

2. Fall: Eine Kolonne außerhalb, eine Kolonne innerhalb des reduzierten Schemas ist differenziert.

3. Fall: Zwei Kolonnen (oder eine Kolonne zweimal) innerhalb des reduzierten Schemas sind differenziert (wobei die einmalige Differentiation jeder Kolonne mit dem unteren Index 2τ in dieser Zählung als selbstverständlich nicht mitgerechnet ist).

Die Determinanten, die zum ersten Fall gehören, sind für $\omega = 0$ selbst Null. Beweis wie im ersten Fall der eben erledigten Untersuchung.

Unter den zum Falle 2 gehörigen Determinanten betrachten wir alle die, bei denen die gleiche Kolonne außerhalb

des reduzierten Schemas differenziert ist. Wenn wir dann für $\omega = 0$ Null setzen, gibt es in allen Kolonnen außerhalb des reduzierten Schemas nur die Diagonalelemente, die von Null verschieden sind, mit Ausnahme der Elemente der differenzierten Kolonne. Jedoch enthält dann diejenige Zeile, die dasselbe Indexduo wie die differenzierte Kolonne hat, außer dem Diagonalelement nur Nullen, wie auch alle übrigen Zeilen außerhalb des reduzierten Schemas mit Ausnahme der Diagonalelemente nur Nullen enthalten. Daher können wir immer nach den Zeilen entwickeln und erhalten, abgesehen von einer Konstanten, die das Produkt aller außerhalb des reduzierten Schemas befindlichen Diagonalkonstanten ist, eine Determinante, die aus der reduzierten Determinante Δ dadurch entsteht, daß man in ihr eine Kolonne nach ω^2 differenziert und dann $\omega = 0$ setzt. Alle Determinanten vom Falle 2, die die Differentiation außerhalb des reduzierten Schemas an der gleichen Kolonne aufweisen, haben, wie man leicht sieht, den gleichen konstanten Faktor vor der Determinante, die aus Δ durch Differentiation einer Zeile nach ω^2 entsteht. Diesen Faktor kann man daher vor die Klammer ziehen und hat in der Klammer die Summe aller verschiedenen Determinanten, die aus Δ durch Differentiation einer Kolonne nach ω^2 entstehen, wenn man $\omega = 0$ setzt. Dies ist aber nichts anderes als $\left(\frac{d\Delta}{d(\omega^2)} \right)_{\omega=0}$. ϵ_2 ist aber so bestimmt, daß diese Größe verschwindet; damit ist erwiesen, daß auch die zum Falle 2 gehörigen Determinanten verschwinden.

Es bleiben somit nur noch die Determinanten vom Falle 3. Man zeigt leicht wie früher, daß nach Entwicklung nach den Zeilen oder Kolonnen, die außerhalb des reduzierten Schemas liegen, als Faktor nur übrig bleibt der zweite Differentialquotient nach ω^2 der reduzierten Determinante Δ . Dann zeigt man noch genau wie vorher, daß die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 \Delta}{d(\omega^2)^2} \right)_{\omega=0} = 0$$

eine lineare inhomogene Gleichung zur Bestimmung von ϵ_3 ist, aus der dann wie früher folgt, daß zu jedem Wertepaar τ , $\epsilon_1^{m-1}(\tau)$ nur ein Wert von ϵ_3 gehört. In ganz der gleichen Weise zeigt man dann auch, daß sich ϵ_ν ; ($\nu > 1$) aus der Gleichung

$$(82) \quad \left(\frac{d^{v-1} A}{d(\omega^2)^{v-1}} \right)_{\omega=0} = 0$$

berechnen läßt, wenn $\varepsilon_0; \varepsilon_1; \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{v-1}$ bereits bekannt sind, ferner auch, daß diese Gleichung linear und inhomogen ist mit Koeffizienten, die eindeutige Funktionen des Zahlenpaares $\tau, \varepsilon_1^m(\tau)$ sind, so daß man in voller Allgemeinheit sagen kann: Zu einem einzigen Wert von τ gehören $\tau + 1$ und nur $\tau + 1$ Werte der Größe E' . Jede der Wurzeln der Determinante (75) ist einwertig; daher gehört zu jeder Wurzel E' nur ein bis auf einen konstanten Faktor bestimmtes Integral. Den zunächst willkürlichen Faktor bestimmt man durch die Forderung, daß der Gleichung

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (R_{n,v})^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 1$$

genügt werden soll.

Die im vorhergehenden ausgesprochenen Sätze über die Nullstellen der Determinante (75) sind von der ursprünglich eingeführten Größe N , die wir brauchten, um einem Konvergenzbeweis aus dem Wege zu gehen, vollkommen unabhängig; höchstens ist der Forderung zu genügen, daß die Größe N größer ist als die Zahl τ , eine Bedingung, der immer genügt werden kann. Hieraus ist, wie schon vorher angedeutet, zu schließen, daß die Ergebnisse, die wir für die Wurzeln der Determinante (75) abgeleitet haben, exakt gültig sind.

Wir wollen jetzt als Beispiel denjenigen Wert von E' berechnen, der zu dem mit $R_0(\vartheta, \varphi)$ bezeichneten Integral gehört. Wir können in diesem Falle den zweiten Index weglassen, weil es nur eine einzige Kugelfunktion der Ordnung Null gibt. Wir haben daher in (78a) für τ Null einzusetzen und finden $\varepsilon_0 = 0$. Die Säkulargleichung (79) reduziert sich in unserem Falle auf

$$\frac{4\pi}{3} (1 + k^2) + 4\pi \varepsilon_1 = 0,$$

woraus dann für ε_1 sich folgender Wert ergibt:

$$(83) \quad \varepsilon_1 = - \frac{1 + k^2}{3}.$$

Wir schreiten jetzt zur Aufstellung der reduzierten Determinante, die in diesem Falle dreireihig ist und folgende Form hat:

$$\begin{aligned}
 4\pi(\omega^2 \varepsilon_2 + \omega^4 \varepsilon_3 + \dots); & \quad \omega^2 \frac{4\pi}{15} (2 - k^2); & \quad \omega^2 \frac{8\pi}{5} k^2 \\
 \frac{4\pi}{15} (2 - k^2); & \quad \frac{4\pi}{3} (6 + E') + \omega^2 \frac{4\pi}{21} \left(\frac{11}{5} + k^2 \right); & \quad -\omega^2 \frac{16\pi}{35} k^2 \\
 \frac{8\pi}{5} k^2; & \quad -\omega^2 \frac{16\pi}{35} k^2; & \quad 16\pi(6 + E') + \omega^2 \frac{144\pi}{105} (1 + k^2)
 \end{aligned}$$

Aus ihr finden wir nach Abspaltung aller unwesentlichen konstanten Faktoren die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
 \omega^2 \varepsilon_2 + \omega^4 \varepsilon_3 + \dots; & \frac{\omega^2 (2 - k^2)}{15}; & \frac{2 \omega^2 k^2}{5} \\
 \frac{2 - k^2}{15}; & \left(2 + \frac{E'}{3} \right) + \frac{\omega^2}{21} \left(\frac{11}{5} + k^2 \right); & -\frac{4 \omega^2 k^2}{35} \\
 \frac{k^2}{5}; & -\frac{2 k^2 \omega^2}{35}; & 6 + E' + \frac{\omega^2}{105} (1 + k^2)
 \end{vmatrix}$$

Aus dieser findet man dann durch Differentiation die Größen ε_2 ; ε_3 ; ε_4 ; ... Wir haben die Rechnung für ε_2 und ε_3 durchgeführt und finden:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{450} (4 k'^2 + 13 k^4); \\
 \varepsilon_3 &= -\frac{1}{70875} (100 + 108 k^2 - 317 k^4 - 42 k^6).
 \end{aligned}$$

Es folgt somit als Wert von E' , der zum Integral $R_0(\vartheta, \varphi)$ gehört:

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} E'_0 &= -\frac{1 + k^2}{3} \omega^2 + \frac{4 k'^2 + 13 k^4}{450} \omega^4 \\ &\quad - \frac{100 + 108 k^2 - 317 k^4 - 42 k^6}{70875} \omega^6 + \dots \end{aligned} \right.$$

Diesen Wert von E' hätte man jetzt in die Gleichungen (71) einzuführen und dann dieses System aufzulösen. Dabei würde man bequemilichkeitshalber dieses System inhomogen machen, indem man willkürlich A_0^0 gleich 1 setzt. Dadurch verstößt man zwar gegen die Bedingung (67), die jedoch hinterher leicht durch Hinzufügung eines geeigneten Faktors wieder erfüllt werden kann. Die approximative Auflösung des Gleichungssystems (71) bietet theoretisch nicht die geringsten Schwierigkeiten, doch dürfte die numerische Auswertung zwar nicht unmöglich, aber doch recht kompliziert sein. Daher wollen wir hier darauf verzichten.

Aus der Tatsache, daß die Funktionen $R(\vartheta, \varphi)$; $S(\vartheta, \varphi)$; $T(\vartheta, \varphi)$; $U(\vartheta, \varphi)$ die Lösenden eines bestimmten Randwertproblems sind oder auch daraus, daß die Integrale von 13 Lösungen gewisser homogener Integralgleichungen sind, folgen sofort die Orthogonalitätseigenschaften:

$$(85) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \cdot R_{m,j}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \cdot S_{m,j}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \cdot T_{m,j}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \cdot U_{m,j}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ wenn } n \neq m \\ \text{oder } \nu \neq j \\ \\ \\ 1 \text{ wenn } n = m \\ \text{und } \nu = j \end{array} \right.$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,\nu} S_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,\nu} T_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,\nu} U_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{n,\nu} T_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{n,\nu} U_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_{n,\nu} U_{m,j} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Aus diesen erkennt man, daß die hier gefundenen Funktionen sich in gleicher Weise zur Vornahme von Reihenentwicklungen eignen, wie z. B. die Kugelflächenfunktionen. Hierauf werden wir in einem der folgenden Paragraphen noch zurückkommen.

§ 11. Die Integrale der Differentialgleichung (11)

Wir zeigen jetzt, daß die Integration der Differentialgleichung (13) und die der Differentialgleichung (11) äquivalente Probleme sind, insofern als die Kenntnis der Integrale von (13) die der Integrale von (11) nach sich zieht und umgekehrt. Diese Behauptung folgt aus der Tatsache, daß es zu einem bestimmten Wert von E' bzw. von $E = E' - \omega^2 k'^2$ nur

einen Wert von H in der Differentialgleichung von (11) geben kann, zu dem ein einziges Integral mit periodischen Eigenschaften gehört. Wäre dem nicht so, gäbe es also zu einer bestimmten Wurzel der Determinante 75 mehrere Werte von H , zu denen mindestens je ein Integral mit periodischen Eigenschaften gehört (oder auch nur ein Wert von H mit zwei linear unabhängigen Integralen der gleichen Eigenschaft) — diese seien mit $f_1; f_2 \dots f_m$ bezeichnet —, so sind, wie wir früher zeigten, die Produkte $f_1(\beta) \cdot f_1(\gamma); f_2(\beta) \cdot f_2(\gamma); \dots f_m(\beta) \cdot f_m(\gamma)$ Integrale von (12) oder, mit Hilfe von Gleichung (8) auf ϑ und φ umgerechnet, Integrale von (13), die sicher linear unabhängig, zu dem gleichen Wert von E' gehören. Im vorigen Paragraphen zeigten wir aber, daß es zu jeder Wurzel von (75) nur ein Integral mit Kugelfunktionseigenschaften gibt. Damit ist der eben behauptete Satz bereits bewiesen. Wir gelangen also zu einem Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{d\gamma^2} - (\omega^2 dn^4 \gamma + E dn^2 \gamma + H) f = 0,$$

wenn wir in einem Integral von (13) ϑ und φ gemäß Gleichung (8) durch β und γ ersetzen und dann für β einen konstanten Wert β_0 substituieren. Nehmen wir z. B. das Integral

$$R_{2n, \nu}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\sigma} A_{2\sigma}^{2j} P_{2\sigma}^{2j}(\cos \vartheta) \cos 2j \varphi \right).$$

Hier setzen wir $\beta = 0$, was dem Wert $\varphi = 0$ entspricht; so kommen wir zu einem Integral der fraglichen Differentialgleichung, das folgendes Aussehen hat:

$$f(\gamma) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\sigma} A_{2\sigma}^{2j} P_{2\sigma}^{2j} \left(\frac{1}{k} dn \gamma \right) \right).$$

Doch ist die Reihenentwicklung nach Zugeordneten der Kugelfunktionen mit variablen unteren und oberen Indizes nicht eindeutig, so daß diese Reihen nur geringen Wert haben.

Zu brauchbaren Entwicklungen aber kommen wir, wenn wir denselben Vorgang an einer der früher eingeführten Integralgleichungen vollziehen, indem wir jetzt, da die Berechnung der gesuchten Funktionen bereits durchgeführt ist, die Integral-

gleichung als Integraldarstellung für unsere Funktionen betrachten. Wir wollen z. B. den Kern (20) zugrunde legen. Indem wir dort $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta \cos \varphi$ nach (8) umrechnen und dann $\beta = K$ setzen, erhalten wir die Gleichung:

$$(86) \quad f(\gamma) = \lambda_{2n,\nu} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\omega d n \gamma \cos \vartheta_0} R_{2n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Hier haben wir an die Stelle des Wertes λ die Größe $\lambda_{2n,\nu}$ geschrieben, um anzudeuten, daß es sich um den Eigenwert der Integralgleichung (19) handelt, der zu der speziellen Eigenfunktion $R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ gehört. Wir ersetzen nun sowohl die e -Funktion als auch die Funktion $R_{2n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0)$ durch ihre nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihen, von denen jede gleichmäßig konvergiert. Daher ist gliedweise Integration gestattet und liefert die nach den ψ -Funktionen fortschreitende Reihe, die wir mit $c \cdot R_{2n,\nu}(\gamma)$ bezeichnen wollen:

$$(87) \quad c \cdot R_{2n,\nu}(\gamma) = 4\pi \lambda_{2n,\nu} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma A_{2\sigma}^0 \psi_{2\sigma}(\omega d n \gamma).$$

Zur exakten Definition der Funktion, die durch die Reihe (87) dargestellt ist, ist es nötig, die Berechnung des Eigenwertes $\lambda_{2n,\nu}$ nachzutragen. Zu diesem Zwecke denken wir uns in Gleichung (19) an die Stelle der Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ die Eigenfunktion $R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ eingetragen. Dann setzen wir

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und erhalten:

$$R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = \lambda_{2n,\nu} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{2n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0.$$

Tragen wir unter dem Integral die Reihenentwicklung für $R_{2n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0)$ ein, so finden wir nach Integration die Gleichung

$$R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \lambda_{2n,\nu} A_0^0,$$

aus der sich dann sehr leicht berechnen läßt:

$$\lambda_{2n,\nu} = \frac{R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{4\pi A_0^0}.$$

Die in Gleichung (87) noch auftretende Konstante c ist, wie man sofort sieht, nichts anderes als $R_{2n,\nu}(K)$, so daß wir als Definitionsgleichung für die Funktion $R_{2n,\nu}(\gamma)$ folgende Gleichung erhalten:

$$(88) \quad R_{2n,\nu}(\gamma) = \frac{R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{A_0^0 R_{2n,\nu}(K)} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} A_{2\sigma}^0 \psi_{2\sigma}(\omega \, d n \, \gamma).$$

Zu einer anderen Entwicklung gelangen wir, wenn wir in dem Kern (20) nicht $\beta = K$, sondern $\beta = K + i K'$ setzen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$R_{2n,\nu}(K + i K') R_{2n,\nu}(\gamma) = \lambda_{2n,\nu} \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i \omega \, k \, c n \, \gamma \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0} (R_{2n,\nu}(\vartheta_0; \varphi_0) \sin \vartheta_0 \, d \vartheta_0 \, d \varphi_0).$$

Hier führen wir die Integration über φ_0 zunächst aus, so daß sich dann folgende Reihe ergibt:

$$R_{2n,\nu}(\gamma) = \frac{2\pi \lambda_{2n,\nu}}{R_{2n,\nu}(K + i K')} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\sigma} (-1)^j A_{2\sigma}^{2j} \int_0^{\pi} J_{2j}(-k \omega \, c n \, \gamma \sin \vartheta_0) P_{2j}^{2j}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \, d \vartheta_0 \right\}.$$

Die Integration über ϑ_0 ist mit Hilfe der Gleichungen (30) und (27) leicht durchgeführt. Setzen wir zur Abkürzung

$$(89) \quad A_{2\sigma} = \sum_{j=0}^{\sigma} \frac{(2\sigma + 2j)!}{2^{2\sigma-1} (\sigma + j)! (\sigma - j)!} A_{2\sigma}^{2j},$$

so ergibt sich die Reihe:

$$(90) \quad R_{2n,\nu}(\gamma) = \frac{R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{2 A_0^0 R_{2n,\nu}(K + i K')} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{2\sigma} \psi_{2\sigma}(k \omega \, c n \, \gamma).$$

Eine dritte Entwicklung ergibt sich mit Hilfe des Kernes $K_s(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ aus (20a). Setzen wir hier $\beta = K + i K'$, so gelangen wir zu der Gleichung:

$$R_{2n, \nu}(K + iK') \cdot R_{2n, \nu}(\gamma) \\ = \mu_{2n, \nu} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega k s n \gamma \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0} R_{2n, \nu}(\vartheta_0; \varphi) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0,$$

wo $\mu_{2n, \nu}$ ein Eigenwert des Kernes $K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ ist. Dieser läßt sich in gleicher Weise wie die Eigenwerte des Kernes $K_1(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ berechnen; wir finden:

$$R_{2n, \nu}\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) = \mu_{2n, \nu} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R_{2n, \nu}(\vartheta_0; \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0; \\ \mu_{2n, \nu} = \frac{R_{2n, \nu}\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)}{4\pi A_0^0}.$$

So ergibt sich dann die Reihenentwicklung:

$$(91) \quad R_{2n, \nu}(\gamma) = \frac{R_{2n, \nu}\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)}{2 A_0^0 R_{2n, \nu}(K + iK')} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{A}_{2\sigma} \psi_{2\sigma}(i\omega k s n \gamma).$$

Hier ist unter $\bar{A}_{2\sigma}$ folgende Größe zu verstehen:

$$\bar{A}_{2\sigma} = \sum_{j=0}^{\sigma} (-1)^j \frac{(2\sigma + 2j)!}{2^{2\sigma-1}(\sigma+j)!(\sigma-j)!} A_{2\sigma}^{2j}.$$

Eine vollkommen analoge Reihenentwicklung wie Gleichung (87) erhält man für die Funktionen $R_{2n+1, \nu}(\gamma)$, nur daß an die Stelle der ψ -Funktionen mit geradem Index solche mit ungeradem treten und daß sich die Eigenwerte $\lambda_{2n+1, \nu}$ ein wenig anders berechnen. Man differenziere die Gleichung (19) einmal nach ϑ und setze dann $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$; so ergibt sich, wenn man für $R_{2n+1, \nu}(\vartheta_0; \varphi)$ die Reihenentwicklung einsetzt:

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R_{2n+1, \nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{\partial \vartheta} &= \lambda_{2n+1, \nu} \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} i\omega \cos \vartheta_0 \\ &\quad \cdot R_{2n+1, \nu}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0; \\ \lambda_{2n+1, \nu} &= \frac{3 \frac{\partial R_{2n+1, \nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{\partial \vartheta}}{4\pi i\omega A_1^0}. \end{aligned} \right.$$

Die zu den Reihen (90) und (91) analogen für die Funktionen $R_{2n+1, \nu}(\vartheta, \varphi)$ sind nicht so leicht herzustellen. Wir benutzen wieder die Integralgleichung (19), ersetzen den Kern durch die ihm äquivalente Reihe (28), setzen schließlich an die Stelle von $P(\vartheta, \varphi)$ die Funktion $R_{2n+1, \nu}(\vartheta, \varphi)$ bzw. die dieser entsprechende Reihe (33a). Schließlich rechnen wir noch $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta \cos \varphi$ nach (8) auf die Größen β und γ um. So erhalten wir nach Integration die Reihe:

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_{2n+1, \nu}(\beta) R_{2n+1, \nu}(\gamma)}{2\pi i \lambda_{2n+1, \nu}} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} \frac{\psi_{2\sigma+1}(\omega \sqrt{dn^2 \beta + dn^2 \gamma - k'^2})}{(\sqrt{dn^2 \beta + dn^2 \gamma - k'^2})^{2\sigma+1}} \\ & \cdot \left[2 G_{2\sigma+1}^0 \left(\frac{dn \beta dn \gamma}{k'}; \frac{ik^2 cn \beta cn \gamma}{k'} \right) A_{2\sigma+1}^0 \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{(2\sigma+2j+1)!}{(2\sigma-2j+1)!} G_{2\sigma+1}^{2j} \left(\frac{dn \beta dn \gamma}{k'}; \frac{ik^2 cn \beta cn \gamma}{k'} \right) A_{2\sigma+1}^{2j} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir beachten nun, daß die Funktion $R_{2n+1, \nu}(\vartheta, \varphi)$, wie man leicht aus der Reihe (33a) erkennt, durch $\cos \vartheta$ teilbar ist. Wegen (8) muß man schließen, daß daher $R_{2n+1, \nu}(\beta)$ durch $dn \beta$ teilbar ist und daher mit $dn \beta$ verschwindet. Daher darf man jetzt nicht mehr $\beta = K + iK'$ setzen, weil dann $dn \beta$ Null werden würde, sondern wir haben vorher die Gleichung (93) noch durch $dn \beta$ zu dividieren. Dann erst kann man $\beta = K + iK'$ setzen, ohne auf beiden Seiten der Gleichung (93) die Null zu erhalten. Aus (27) rechnet man leicht nach, daß

$$\left\{ \frac{1}{dn \beta} G_{2\sigma+1}^{2j} \left(\frac{1}{k} dn \beta dn \gamma; \frac{ik^2}{k'} cn \beta cn \gamma \right) \right\}_{\beta = K + iK'} \\ = \varepsilon_j \cdot \frac{k^{2\sigma}}{k'} dn \gamma (cn \gamma)^{2\sigma} \frac{(2\sigma - 2j + 1)!}{2^{2\sigma-1} (\sigma + j)! (\sigma - j)!}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \\ \varepsilon_j = 1; j \neq 0$$

ist. Schreiben wir dann noch

$$A_{2\sigma+1} = k^{2\sigma} \cdot \sum_{j=0}^{\sigma} A_{2\sigma+1}^{2j} \frac{(2\sigma + 2j + 1)!}{2^{2\sigma-1} (\sigma + j)! (\sigma - j)!},$$

so erhalten wir folgende Reihe:

$$(94) \left\{ \begin{aligned} R_{2n+1, \nu}(\gamma) &= \frac{3 \cdot \frac{\partial R_{2n+1, \nu} \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)}{\partial \vartheta}}{2 \omega A_1^0 \left(\frac{R_{2n+1, \nu}(\beta)}{dn \beta} \right)_{\beta=K+iK'}} \\ &\cdot \frac{1}{k \cdot k'} \cdot \frac{dn \gamma}{cn \gamma} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{2\sigma+1} \psi_{2\sigma+1}(\omega k cn \gamma). \end{aligned} \right.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir aus dem Kern

$$K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$$

die Reihe

$$(95) \left\{ \begin{aligned} R_{2n+1, \nu}(\gamma) &= \frac{3 \cdot \frac{\partial R_{2n+1, \nu} \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)}{\partial \vartheta}}{2 \omega A_1^0 \left(\frac{R_{2n+1, \nu}(\beta)}{dn \beta} \right)_{\beta=K+iK'}} \\ &\cdot \frac{1}{i k k'} \cdot \frac{dn \gamma}{sn \gamma} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{A}_{2\sigma+1} \psi_{2\sigma+1}(i \omega sn \gamma), \end{aligned} \right.$$

wo

$$\bar{A}_{2\sigma+1} = k^{2\sigma} \cdot \sum_{j=0}^{\sigma} (-1)^j A_{2\sigma+1}^{2j} \frac{(2\sigma + 2j + 1)!}{2^{2\sigma-1} (\sigma + j)! (\sigma - j)!}$$

bedeutet. Um diese Reihe zu verifizieren, beachte man, daß die Eigenwerte $\mu_{2n+1, \nu}$ des Kernes $K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0)$ sich so darstellen lassen:

$$(96) \quad \mu_{2n+1, \nu} = \frac{3 \cdot \frac{\partial R_{2n+1, \nu} \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)}{\partial \vartheta}}{4 \pi i \omega A_1^0}.$$

Es würde zu weit führen, für jede der noch fehlenden sechs Typen alle möglichen nach den ψ -Funktionen fortschreitenden Reihen anzugeben; wir wollen uns auf die hier angegebenen beschränken, da es nicht schwer ist, in genau der gleichen Weise die übrigen Reihenentwicklungen herzustellen.

§ 12. Die Integrale der zweiten Art der Differentialgleichung (11)

Durch die bisherigen Entwicklungen sind wir in die Lage versetzt worden, Integrale der Schwingungsgleichung (10) anzugeben, die im Endlichen überall endlich sind. Es ist bekannt, daß solche Integrale gerade die einfallenden Wellen darstellen. Zur Beherrschung der Beugungserscheinungen gehört aber auch die Kenntnis der von den beugenden Teilchen wegeilenden Wellen, deren analytische Ausdrücke wir noch nicht angegeben haben. Dieser Ableitung wenden wir uns jetzt zu.

Wir erinnern daran, daß das Integral (86), durch das die Integrale der ersten Art dargestellt wurden, aus der Integralgleichung (19) direkt folgte. Diese aber erhielten wir aus einem allgemeinen Integral der Wellengleichung, indem wir die Grenzen so wählten, daß gewisse bei der partiellen Integration auftretende Integrale verschwanden. Dies Verschwinden war die hinreichende Bedingung für die Richtigkeit unserer Integralgleichung. Sie führte auf die Grenzen 0 und π für ϑ_0 , und 0 und 2π für φ_0 . Man kann sich jedoch die Frage vorlegen, ob die so bestimmten Grenzen die einzigen möglichen sind. Dies ist dann zu verneinen, wenn man auch komplexe Integrationswege zulassen will, und es gibt in der Tat keinen Grund, der eine Beschränkung auf nur reelle Integrationswege rechtfertigen würde. Doch wollen wir den Weg für die Integration über φ_0 ebenso wählen wie früher, also zwischen 0 und 2π ; nur der Integrationsweg für ϑ_0 soll geändert werden.

Betrachten wir einmal die auf Seite 630 durchgeführte partielle Integration, die uns die Integralgleichung (19) lieferte, so erkennen wir, daß das eine der beiden einfachen Integrale, nämlich

$$\int_{\vartheta_0=a}^{\vartheta_0=b} \frac{1}{\sin \vartheta_0} \left\{ \frac{\partial e^{i\omega x}}{\partial \varphi_0} R_{n,v}(\vartheta_0, \varphi_0) - \frac{\partial R_{n,v}(\vartheta; \varphi_0)}{\partial \varphi} e^{i\omega \frac{x}{2}} \right\}_{\varphi_0=0}^{\varphi_0=2\pi} d\vartheta_0;$$

$$\varepsilon = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0$$

verschwindet, weil der Integrand eine Differenz zweier Funktionswerte für die Argumente $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = 2\pi$ ist, die vorkommenden Funktionen aber alle endlich und in bezug auf φ_0

von der Periode 2π sind. Wir haben die Grenzen für ϑ_0 nun so zu wählen, daß das andere Integral

$$\int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=2\pi} \left\{ \sin \vartheta_0 \left[\frac{\partial e^{i\omega z}}{\partial \vartheta_0} R_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0) - \frac{\partial R_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0)}{\partial \vartheta_0} e^{i\omega z} \right] \right\}_{\vartheta_0=a}^{\vartheta_0=b} d\varphi_0;$$

$$z = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0$$

ebenfalls verschwindet. Rechnen wir $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta \cos \varphi$ auf die Koordinaten β und γ um und setzen schließlich $\gamma = K$, so erhalten wir nach Ausführung der Integration:

$$\int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=2\pi} \left\{ \left[\sin \vartheta_0 \left(\frac{\partial e^{i\omega d n \beta \cos \vartheta_0}}{\partial \vartheta_0} R_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0) - \frac{\partial R_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0)}{\partial \vartheta_0} e^{i\omega d n \beta \cos \vartheta_0} \right) \right]_{\vartheta_0=a} \right. \\ \left. - \left[\sin \vartheta_0 \left(\frac{\partial e^{i\omega d n \beta \cos \vartheta_0}}{\partial \vartheta_0} \cdot R_{n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0) - \frac{\partial R_{n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0)}{\partial \vartheta_0} e^{i\omega d n \beta \cos \vartheta_0} \right) \right]_{\vartheta_0=b} \right\} d\varphi_0.$$

Dann sind die Stellen a und b so zu wählen, daß jeder der Summanden Null wird. Für den Punkt a wählen wir wieder Null, den Punkt b jedoch nehmen wir im Komplex-Unendlichen so an, daß der zweite Summand exponentiell verschwindet. Mit dieser Wahl von b erhalten wir dann ein zweites Integral der Differentialgleichung (11) in der folgenden Form:

$$(97) \quad f(\beta) = \text{const} \int_0^b e^{i\omega d n \beta \cos \vartheta_0} \varrho_{n,\nu}(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0,$$

wo die Funktion ϱ durch ein Integral oder die diesem äquivalente Reihe definiert werden kann:

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho_{n,\nu}(\cos \vartheta) &= \int_0^{2\pi} R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) d\varphi; \\ \varrho_{2n,\nu}(\cos \vartheta) &= 2\pi \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{2\sigma}^0 P_{2\sigma}(\cos \vartheta); \\ \varrho_{2n+1,\nu}(\cos \vartheta) &= 2\pi \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{2\sigma+1}^0 P_{2\sigma+1}(\cos \vartheta). \end{aligned} \right.$$

Anstatt b so zu definieren wie eben, hätten wir auch fordern können, b sei im Komplex-Unendlichen so bestimmt,

daß das Integral (97) konvergiert. Man sieht leicht, daß beide Forderungen auf das gleiche herauskommen, jedoch ist es zweckmäßiger, diese zweite Formulierung zu wählen.

Doch auch mit dieser läßt sich die gestellte Aufgabe nicht direkt lösen. Denn im Unendlichen ist nicht nur die e -Funktion, sondern auch die Funktion ϱ_n , wesentlich singular. Man müßte also das asymptotische Verhalten der Funktion ϱ_n , kennen, ehe man Exaktes über das Integral aussagen kann. Asymptotische Formeln für ϱ_n , anzugeben ist dem Verfasser aber nicht gelungen. Aus diesem Grunde soll hier ein etwas anderes Verfahren eingeschlagen werden.

Da die Reihe (98), wie man leicht zeigt, für alle endlichen Werte des Argumentes gleichmäßig konvergiert, so können wir versuchen, diese Reihe in (97) einzusetzen und dann gliedweise zu integrieren. Tun wir dies aber, so gelangen wir zu folgenden Integralen:

$$(99) \quad \int_0^b e^{i \omega d n \beta \cos \vartheta_0} P_n(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 d \vartheta_0.$$

Wir wollen nun einen Integrationsweg bestimmen, längs dessen die Integrale unabhängig vom Wert des Index der Kugelfunktionen konvergieren. Dies aber ist nicht mehr schwer, da die Kugelfunktionen als rationale Funktionen im Unendlichen nur einen Pol haben, dessen Ordnung der Ordnungszahl der Kugelfunktion gleich ist. Ist $d n \beta$ dem Betrage nach größer als 1, so genügt es, den Integrationsweg bei $\frac{\pi}{2} - i \infty$ enden zu lassen, damit die gestellte Bedingung erfüllt wird.

Die Integrale (99) mit dem so bestimmten Integrationsweg sind nach Heine¹⁾ Funktionen, die derselben Differentialgleichung genügen, wie die von uns durch Gleichung (21) definierten ψ -Funktionen, ohne mit ihnen identisch zu sein; sie bilden vielmehr mit dem ψ_n ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w \psi_n(w)}{d w^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{w^2}\right) w \psi_n = 0.$$

1) E Heine, a. a. O. I. S. 347.

Wir erhalten daher als Integrale der zweiten Art Reihen, die nach den Zylinderfunktionen der zweiten Art fortschreiten. Doch wollen wir als Entwicklungsfunktionen nicht die Funktionen (99) wählen, sondern eine ganz bestimmte Linearkombination aus diesen und den ψ -Funktionen. Wir definieren:

$$(100) \quad \psi_n(x) = -\{\psi_n(x) + i(-1)^n \psi_{-n-1}(x)\}.$$

Wir erhalten dann, je nachdem der erste Index der Funktion $R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ gerade oder ungerade ist, eine Reihe, die nach geraden oder ungeraden ψ -Funktionen fortschreitet. Indem wir über eine willkürliche Konstante verfügen, schreiben wir:

$$(101) \quad \begin{cases} R_{2n,\nu}^{(2)}(\beta) = \frac{R_{2n,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{A_0^0 R_{2n,\nu}^{(1)}(K)} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} A_{2\sigma}^0 \psi_{2\sigma}(\omega d n \beta); \\ R_{2n+1,\nu}^{(2)}(\beta) = 3 \frac{\partial R_{2n+1,\nu}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{i \omega A_1^0 R_{2n+1,\nu}^{(1)}(K)} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} A_{2\sigma+1}^0 \psi_{2\sigma+1}(\omega d n \beta). \end{cases}$$

Diese Reihen konvergieren sicher außerhalb des Kreises $|dn\beta| = 1$, wie man aus der Betrachtung der Majorante erkennt, die durch Einsetzung der Maximalabschätzungen für die A_m^0 S. (643) gewonnen werden kann.

Es ist übrigens nicht schwer, die analytische Fortsetzung für die Funktionen (101) zu finden, die über das Verhalten innerhalb des Einheitskreises Auskunft gibt. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Funktion $\psi_0(\omega \sqrt{r^2 - 2r r_1 \cos \gamma + r_1^2})$ nach den Kugelfunktionen und finden:

$$\begin{aligned} \psi_0(\omega \sqrt{r^2 - 2r r_1 \cos \gamma + r_1^2}) \\ = \sum_{\sigma=0}^{\infty} (2\sigma + 1) (-1)^{\sigma} \psi_{\sigma}(\omega r) \psi_{\sigma}(\omega r_1) P_{\sigma}(\cos \gamma); \end{aligned}$$

$$r < r_1; \quad \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Diese Gleichung rechne man nun nach (23) auf kartesische Koordinaten um, indem man den drei Koordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ kartesische Koordinaten x_1, y_1, z_1 entsprechen läßt. Setzt man dann noch z, y_1, z_1 gleich Null, so ergibt eine ähnliche Überlegung wie die im Paragraphen 5 durchgeführte, die Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi_0(\omega \sqrt{(x-x_1)^2+y^2}) \\ = \sum_{\sigma=0}^{\infty} (2\sigma+1)(-1)^{\sigma} \frac{\psi_{\sigma}(\omega \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}^{\sigma}} \Psi_{\sigma}(\omega x_1) G_{\sigma}^0(x, y). \end{aligned}$$

Setzen wir andererseits in die erste der Reihen (101) für die Größen $A_{2\sigma}^0$ die Ausdrücke (32) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_{2n,\nu}^{(2)}(\beta) = \text{const.} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (4\sigma+1) \frac{\psi_{2\sigma}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}^{2\sigma}} \\ \cdot G_{2\sigma}^0(\cos \vartheta; k \sin \vartheta \cos \varphi) \Psi_{\sigma}(\omega d n \beta) R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d \vartheta d \varphi. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der eben abgeleiteten Reihe zeigt, daß beide, abgesehen vom Faktor $R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ und der Integration miteinander identisch wären, wenn auch noch die Glieder mit ungeraden Indizes vorhanden wären. Nun hatten wir aber gezeigt (§ 7), daß die Glieder mit ungeradem Index, wenn man sie mit einer Funktion $R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ multipliziert, und dann über ϑ von 0 bis π und über φ von 0 bis 2π integriert verschwinden. Daher dürfen wir sie ohne weiteres hinzufügen und finden daher als analytische Fortsetzung der Reihen (101):

$$(102) R_{n,\nu}^{(2)}(\beta) = \text{const} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(\omega \sqrt{(\cos \vartheta - d n \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}) \\ \cdot R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d \vartheta d \varphi.$$

Setzen wir β gleich Null oder $2iK'$, so sehen wir leicht, daß die Funktion (102) an dieser Stelle eine logarithmische Singularität hat; denn dann verschwindet das Argument der Funktion für $\vartheta = 0$ oder π unabhängig von dem Werte von φ .

Da $\Psi_0(x) = \frac{e^{-ix}}{2x}$ ist, nimmt das Integral in der Nähe des Punktes $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ die Form $\int \frac{dx}{x-1}$ an, woraus die Behauptung sofort erfolgt.

Doch auch stetig sind diese Funktionen nicht mehr. Dies liegt daran, daß die Wurzel Verzweigungspunkte hat. Ist nämlich $d n \beta$ reell und dem Betrage nach kleiner als 1, so sieht man leicht, daß die Punkte $\cos \vartheta = d n \beta$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ solche sind. Doch geben nicht alle diese Anlaß zu Verzweigungspunkten der durch (102) dargestellten Funktionen,

weil diese Pole im allgemeinen auf der Kugelfläche nur diskret liegen und von nicht höherer als der ersten Ordnung sind. In solchen Punkten konvergiert aber das Doppelintegral. Nur dort konvergiert es nicht, wo der Pol unabhängig vom Werte von q auftritt, also an den Stellen $\vartheta = 0, \pi$. Das sind aber gerade die Punkte, in denen die Funktionen der zweiten Art eine logarithmische Singularität haben. Prinzipiell könnte man von diesen beiden Punkten aus die Verzweigungsschnitte in beliebiger Weise verlaufen lassen, doch hatten wir bei der Definition durch Reihen dafür gesorgt, daß außerhalb des Einheitskreises Unstetigkeiten nicht auftreten können. Wir legen daher den Verzweigungsschnitt in die reelle Achse der $d n \beta$ -Ebene, zwischen die Punkte -1 und 1 . Der Sprung der Funktion an diesem „Querschnitt“ ist gleich der Differenz der Funktionswerte für positive und negative Quadratwurzel, also unter Beachtung der Bedeutung der Funktion $\psi_0(x)$:

$$R_{n, \nu(+)}^{(2)} - R_{n, \nu(-)}^{(2)} = i \text{const} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\omega \sqrt{(\cos \vartheta - d n \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 q})}{\omega \cdot \sqrt{(\cos \vartheta - d n \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 q}} \cdot R_{n, \nu}(\vartheta, q) \sin \vartheta d \vartheta d q$$

Würde man übrigens in (102) die Funktion ψ_0 durch ψ_0 ersetzen, so würde man zu einer neuen Integraldarstellung für die Funktionen der ersten Art gelangen. Obgleich auch hier die Quadratwurzel verschiedene Vorzeichen haben kann, sind die Funktionen der ersten Art doch eindeutig, weil nämlich ψ_0 eine gerade Funktion ist. Die Differenz der Werte am Querschnitt ist also Null.

Die eben gefundenen Funktionen der zweiten Art unterscheiden wir von denen der ersten Art — die im Paragraphen 11 angegeben wurden — dadurch, daß wir ihnen als oberen Index eine 2 anfügen, während die Funktionen der ersten Art von jetzt ab als oberen Index eine 1 erhalten sollen. Die Flächenfunktionen aber, also die, die von zwei Argumenten abhängen, erhalten wie bisher keinen oberen Index, da hier eine Verwechslung ausgeschlossen ist: als Flächenfunktionen werden wir nämlich nur solche gebrauchen, die das Randwertproblem lösen.

Wir haben gefunden, daß man aus den Funktionen der ersten Art die der zweiten Art herstellen kann, indem man in

den Reihenentwicklungen der ersten Art die Funktionen ψ_n durch die Funktionen Ψ_n ersetzt. Doch gilt dies nicht allgemein, wenigstens wurde es nicht allgemein bewiesen, sondern nur für die Reihen vom Typus (88), also für solche, bei denen das Argument der Zylinderfunktionen die Funktion $\omega \, d n \beta$ war. Es ist sehr wahrscheinlich, daß für die Funktionen der zweiten Art auch Reihenentwicklungen angegeben werden können, die den Reihen (90) und (91) für die Funktionen der ersten Art entsprechen. Dazu müßte man in den Integralen auch der Integrationsvariablen einen komplexen Weg vorschreiben; dazu aber gehörte wiederum eine Kenntnis des Verhaltens der Funktionen $R_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0)$ für sowohl große komplexe ϑ_0 als auch ebensolche φ_0 . Da aber die wesentlichen Züge der Funktionen der zweiten Art sich bereits auf dem hier durchgeführten einfacheren Wege ergaben, glaubte der Verfasser, der eben ausgesprochenen Vermutung nicht mehr nachspüren zu brauchen.

Doch bedürfen unsere Untersuchungen in anderer Hinsicht der Vervollkommnung. Für die Funktionen der ersten Art genügte es, gewissermaßen als Beispiele den Fall der Funktionen $R_{n,\nu}^{(1)}(\beta)$ zu entwickeln; dann war es ohne weiteres klar, wie auch die anderen Funktionstypen zu behandeln seien. Hier aber ist insofern ein Unterschied, als die Methode ja wesentlich darauf beruht, eine Funktion von $\cos \vartheta_0$ allein anzugeben (in dem eben behandelten Falle die Funktion $\varrho_{n,\nu}(\cos \vartheta_0)$), mit der man eine gliedweise Integration ausführen kann. Daß eine ähnliche Funktion auch für die anderen Typen angegeben werden kann, das bedarf noch eines Nachweises, der aber leicht zu erbringen ist.

Betrachten wir z. B. die Funktionen $T_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$. Sie sind Lösungen der Integralgleichung (53). Dort ersetzen wir wieder ϑ und φ durch β und γ ; dann setze man $\gamma = K$. So ergibt sich für die Funktionen der ersten Art:

$$T_{n,\nu}^{(1)}(\beta) = \text{const} \cdot s n \beta \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 e^{i \omega \cos \vartheta_0 d n \beta} \cdot T_{n,\nu}(\vartheta_0 \varphi_0) \sin \vartheta_0 d \vartheta_0 d \varphi_0.$$

Definieren wir nun in Analogie zu der Funktion $\varrho_{n,\nu}(\cos \vartheta_0)$ die Funktion

$$\tau_{n,\nu}(\cos \vartheta_0) = \sin \vartheta_0 \int_0^{2\pi} T_{n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \varphi_0 d\varphi_0,$$

so erhalten wir unter Beachtung der Reihenentwicklungen (41) und (44):

$$\tau_{2n,\nu}(\cos \vartheta_0) = \sin \vartheta_0 \sum_{\sigma=1}^{\infty} B_{2\sigma}^1 P_{2\sigma}^1(\cos \vartheta_0);$$

$$\tau_{2n+1,\nu}(\cos \vartheta_0) = \sin \vartheta_0 \sum_{\sigma=0}^{\infty} B_{2\sigma+1}^1 P_{2\sigma+1}^1(\cos \vartheta_0).$$

Man verifiziere ferner, daß die Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ix \cos \vartheta_0} P_n^1(\cos \vartheta_0) \sin^2 \vartheta_0 d\vartheta_0 = 2i^n n \cdot (n+1) \frac{\Psi_n(x)}{x}$$

gilt. So ergibt sich schließlich für die Funktionen der zweiten Art:

$$(103) T_{2n,\nu}^{(2)} = \text{const} \cdot sn\beta \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma} 2\sigma(2\sigma+1) B_{2\sigma}^1 \frac{\Psi_{2\sigma}(\omega dn\beta)}{\omega dn\beta}.$$

Analoges für die Funktionen mit ungeradem ersten Index. Zwar könnte man leicht mit Hilfe einer der Rekursionsformeln der Zylinderfunktionen $\Psi_n(x)/x$ durch $\Psi_{n-1}(x)$ und $\Psi_{n+1}(x)$ ersetzen, doch ist es vorteilhaft gleich an die eben aufgestellte Reihe anzuknüpfen. Jetzt haben wir für die Größen B_n^1 gewisse Doppelintegrale einzusetzen; diese haben wir bisher explizit nicht angegeben, doch findet man sie leicht aus den Formeln (57) und (58), wenn man dort den geraden oberen Index $2m$ durch den ungeraden $2m+1$ und $U_{n,\nu}$ durch $T_{n,\nu}$ ersetzt. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_{2n,\nu}^{(2)}(\beta) &= \text{const} \cdot sn\beta \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (2\sigma)(2\sigma+1)(4\sigma+1) \text{tg } \varphi_0 \\ &\quad \cdot \frac{\Psi_{2\sigma}(\omega \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0})}{\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + k^2 \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0}^{2\sigma}} \frac{\Psi_{2\sigma}(\omega dn\beta)}{\omega dn\beta} \\ &\quad \cdot G_{2\sigma}^1(\cos \vartheta_0; k \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) T_{2n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$\frac{y}{\pi} \frac{\Psi_1(\omega \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2})}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{\infty} (2\sigma+3)(\sigma+1)(\sigma+2) \frac{\Psi_{\sigma+1}(\omega x_1)}{\omega x_1} \frac{\Psi_{\sigma+1}(\omega \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\sigma+1}}$$

$$\cdot G_{\sigma+1}^1(x, y).$$

Daraus schließen wir dann wie vorher auf die Richtigkeit folgender analytischen Fortsetzung:

$$(104) \left\{ \begin{aligned} T_{n,\nu}^{(2)}(\beta) &= \text{const} \cdot sn \beta \\ &\cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\Psi_1(\omega \sqrt{(\cos \vartheta - dn \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{\sqrt{(\cos \vartheta - dn \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}} \\ &\cdot T_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Auch dies ist eine mehrwertige Funktion mit Polen in den Stellen $dn \beta = \pm 1$. Doch sind diese Pole nicht mehr logarithmisch, sondern von höherer Ordnung.

Ganz analog kann man verfahren, um die Funktionen $S_{n,\nu}^{(2)}(\beta)$ abzuleiten. Dazu beachte man nur, daß nach den auf S. 647 gemachten Bemerkungen die Funktionen $T_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ in die $S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ übergehen, wenn wir ω durch ω/k' , k durch $-i k/k'$ und φ durch $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ersetzen. Führen wir diese Substitution an dem Kern der Integralgleichung (53) durch, so ergibt sich:

$$\sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 e^{\frac{i\omega}{k'} (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 - \frac{i k}{k'} \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)}.$$

Dieser Kern hat zu Eigenfunktionen sicher die $S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$. Dann können wir genau so verfahren wie eben und erhalten schließlich:

$$(105) \left\{ \begin{aligned} S_{n,\nu}^{(2)}(\beta) &= \text{const} \cdot cn \beta \\ &\cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\Psi_1(\omega \sqrt{(\cos \vartheta - dn \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{\sqrt{(\cos \vartheta - dn \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}} \\ &\cdot S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe des Kernes der Integralgleichung (53) und unter Beachtung der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = \psi_0(x)$ verifiziert man mühe-los, daß auch

$$\sin^2 \vartheta \sin 2\varphi \sin^2 \vartheta_0 \sin 2\varphi_0 e^{i\omega \cos \vartheta \cos \vartheta_0} \cdot \psi_0(\omega k \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)$$

ein Kern ist, dessen Eigenfunktionen der Differentialgleich. (13) genügen. Dieser ist geeignet, um die Funktionen zweiter Art $U_{n,\nu}^{(2)}(\beta)$ herzustellen. Man findet:

$$(106) \left\{ \begin{aligned} U_{n,\nu}^{(2)}(\beta) &= \text{const} \cdot s n \beta \cdot c n \beta \\ &\cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi \frac{\Psi_2(\omega \sqrt{(\cos \vartheta - d n \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi})}{(\cos \vartheta - d n \beta)^2 + k^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \\ &\cdot U_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right.$$

§ 13. Zwei Reihenentwicklungen

Wie wir auf S. 630 gezeigt haben, hat die Integralgleichung mit dem Kern

$$e^{i\omega (d n \alpha \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + k c n \alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + i k s n \alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)}$$

zu Eigenfunktionen die Integrale der Differentialgleichung (13), die dem gestellten Randwertproblem genügen. Denn die Größen $d n \alpha$, $k c n \alpha$, $i k s n \alpha$ erfüllen die auf S. 628 eingeführten Nebenbedingungen $a^2 - c^2 = 1$ und $b^2 - c^2 = k^2$. Man kann daraus schließen, daß die eben genannte e -Funktion eine bilineare Entwicklung von folgender Gestalt zulassen wird:

$$\sum_n \sum_\nu S_{\varepsilon_{n,\nu}}(\alpha) R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi) R_{n,\nu}(\vartheta_0, \varphi_0).$$

Dabei bedeutet das Zeichen \sum eine Summation „über Buchstaben“, d. h. man hat den Buchstaben R der Reihe nach durch S , T , U zu ersetzen, und auch an die Stelle der zunächst unbekannten Größen $\varepsilon_{n,\nu}$ irgendwelche anderen Entwicklungskoeffizienten gesetzt zu denken. Diese Koeffizienten sind natürlich Funktionen von α . Da aber die e -Funktion als Funktion von α , ϑ , φ der Schwingungsgleichung genügt, so müssen die Entwicklungskoeffizienten so bestimmt sein, daß jedes Glied der Reihenentwicklung der Schwingungsgleichung genügt. Die Koeffizienten von $R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi)$ können daher, abgesehen von einem konstanten Faktor, nur die Funktionen $R_{n,\nu}^{(1)}(\alpha)$ oder $R_{n,\nu}^{(2)}(\alpha)$ sein. Da aber die e -Funktion eindeutig und überall endlich ist, so kommen nur die Funktionen der ersten Art in Frage, so daß sich als Entwicklung ergibt:

$$(107) \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega(dna \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + kcn a \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + iksn a \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0)} \\ = \sum_n \sum_v S_{n,v} \cdot R_{n,v}^{(1)}(\alpha) \cdot R_{n,v}(\vartheta, \varphi) \cdot R_{n,v}(\vartheta_0, \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet also S , daß man $R_{n,v}$ und $r_{n,v}$ durch $S_{n,v}$, $T_{n,v}$, $U_{n,v}$ und $s_{n,v}$, $t_{n,v}$, $u_{n,v}$ zu ersetzen habe. Die Reihenentwicklung ist also bekannt, sobald wir die Koeffizienten $r_{n,v}$, $s_{n,v}$, $t_{n,v}$, $u_{n,v}$ kennen.

Man beachte nun, daß die e -Funktion in den Kern der Integralgleichung (19) übergeht, wenn wir $\alpha = 0$ setzen. Die Entwicklungskoeffizienten sind aber dann nichts anderes als die reziproken Eigenwerte dieser Integralgleichung. Mit anderen Worten: Für die Bestimmung z. B. der Größen $r_{n,v}$ ergibt sich die Gleichung:

$$(108) \quad r_{n,v} R_{n,v}^{(1)}(0) = \frac{1}{\lambda_{n,v}}.$$

Da wir aber bereits auf S. 680, 682 und 684 die Berechnung dieser Eigenwerte auseinandergesetzt hatten, so dürfen wir $r_{n,v}$ als bekannt ansehen. Analog verfahren wir zur Berechnung der $s_{n,v}$, wobei wir auf die Durchführung der Berechnung der zu diesen Funktionen gehörenden Eigenwerte wohl verzichten dürfen, da eine Unklarheit hierüber nicht herrschen kann.

Die Koeffizienten $t_{n,v}$ sind auf diesem Wege nicht zu erhalten, weil die Funktionen $T_{n,v}^{(1)}(\alpha)$ für $\alpha = 0$ verschwinden. Wir setzen deshalb jetzt $\alpha = K + iK'$. Dadurch geht die e -Funktion in den Kern $e^{-\omega' \sin \vartheta \sin \vartheta_0 (k' \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0)}$ [Gleichung (20a)] über; dann verfahren wir so wie früher.

Ein wenig komplizierter ist die Berechnung der Koeffizienten $u_{n,v}$. Dazu betrachten wir nicht die eingangs angeschriebene e -Funktion, sondern die Differenz aus dieser und der e -Funktion, in der φ durch $-\varphi$ ersetzt wurde. Wir erhalten auf diese Weise die Funktion

$$(109) \left\{ \begin{aligned} & -2i\omega ksn\alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0 \\ & \cdot e^{i\omega(dna \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + kcn a \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi \cos \varphi_0)} \\ & \cdot \psi_0(-\omega ksn\alpha \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \sin \varphi \sin \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Die dieser entsprechende Reihenentwicklung enthält natürlich nur noch solche Funktionen, die in bezug auf φ ungerade sind; die Koeffizienten dieser Reihe sind daher entweder $2t_{n,v}$ oder $2u_{n,v}$. Die Reihe verschwindet für $\alpha = 0$ und ist daher

durch $\sin \alpha$ dividierbar. Auch der Faktor 2 läßt sich auf beiden Seiten wegdividieren. Setzen wir dann $\alpha = 0$, so erhalten wir gerade aus der Funktion (113) den Kern der Integralgleichung (53) (nur mit dem Faktor $-\omega i k$). Die Größen

$$\frac{i}{\omega k} u_{n,v} \left(\frac{U_{n,v}^{(1)}(\alpha)}{\sin \alpha} \right)_{\alpha=0}$$

sind daher nichts anderes als die reziproken Eigenwerte der Integralgleichung (53), die sich in ähnlich einfacher Weise berechnen lassen, wie die Kerne (20) und (20a). Damit ist auch die Berechnung der $u_{n,v}$ durchgeführt.

Einer freundlichen persönlichen Mitteilung Hrn. Dr. Hammersteins verdankt der Verfasser die Kenntnis der Tatsache, daß die bilineare Entwicklung eines Kernes $K(x, y; \xi, \eta)$ im Fundamentalbereich der Variablenpaare x, y und ξ, η immer dann konvergiert (mit Ausschluß des Randes sogar gleichmäßig), wenn der Kern K stetige erste und zweite Ableitungen besitzt. Da diese Bedingung für unsere c -Funktion erfüllt ist, so schließen wir auf die Konvergenz der Reihe (111).

Die Gleichungen (85) lehren, daß, wenn man mit den Koeffizienten

$$(110) \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } a_{n,v} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) R_{n,v}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi; \\ \text{II. } b_{n,v} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) S_{n,v}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi; \\ \text{III. } c_{n,v} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) T_{n,v}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi; \\ \text{IV. } d_{n,v} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta, \varphi) U_{n,v}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{array} \right.$$

die Reihe

$$\sum_n \sum_v S a_{n,v} R_{n,v}(\vartheta, \varphi)$$

bildet, diese im Falle der Konvergenz die Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ darstellt.

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Funktion $R_{\alpha, \kappa}(\vartheta, \varphi; \omega)$ mit abgeändertem Parameterwert ω nach den Funktionen

$$R_{n,\nu}(\vartheta, \varphi; \omega); S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi; \omega); T_{n,\nu}(\vartheta, \varphi; \omega); U_{n,\nu}(\vartheta, \varphi; \omega)$$

zu entwickeln. Da $\omega = q \cdot \frac{\nu}{c}$ ist, so kann eine Änderung von ω einmal dadurch entstehen, daß man q , d. h. die großen Achsen der konfokalen Ellipsoide ändert, oder dadurch, daß man die Schwingungszahl ν ändert. Im ersten Falle würde sich nicht nur ω , sondern auch k und k' , die elliptischen Moduln, ändern. Diesen Fall wollen wir ausschließen, da er kein physikalisches Interesse bietet und nur den Fall betrachten, daß allein ω und nicht k und k' sich geändert haben.

Setzen wir jetzt in (114) an die Stelle der Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ die Funktion $R_{\sigma,\kappa}(\vartheta, \varphi; \omega)$, so sehen wir leicht, daß die Integrale (114 II); (114 III und IV) verschwinden. Die Integrale (114 I) sind nur von Null verschieden, wenn n gerade oder ungerade ist, je nachdem der erste Index der zu entwickelnden Funktion $R_{\sigma,\kappa}(\vartheta, \varphi; \omega)$ gerade oder ungerade ist.

Angenommen, der erste Index der zu entwickelnden Funktion ist gerade, so finden wir unter Beachtung der Reihenentwicklungen (31a):

$$\begin{aligned} {}^{2\sigma,\kappa}M_{2n}^{\nu}(\bar{\omega}, \omega) &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_s \sum_t {}^{2\sigma,\kappa}A_{2s}^{2t}(\bar{\omega}) P_{2s}^{2t}(\cos \vartheta) \cos 2t \varphi \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_m \sum_{\varrho} {}^{2n,\nu}A_{2m}^{2\varrho}(\omega) P_{2m}^{2\varrho}(\cos \vartheta) \cos 2\varrho \varphi \right\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \end{aligned}$$

und unter Beachtung der Orthogonalität der Kugelfunktionen:

$$(111) \quad {}^{2\sigma,\kappa}M_{2n}^{\nu}(\bar{\omega}; \omega) = \sum_s \sum_t \frac{2}{4s+1} \frac{(2s+2t)!}{(2s-2t)!} {}^{2\sigma,\kappa}A_{2s}^{2t}(\bar{\omega}) {}^{2n,\nu}A_{2s}^{2t}(\omega).$$

Damit ist die gesuchte Reihenentwicklung hergestellt.

Die entsprechenden Koeffizienten für die Entwicklung der Funktionen $S_{\sigma,\kappa}(\vartheta, \varphi; \omega)$ usw. nach den $S_{n,\nu}(\vartheta, \varphi; \omega)$ usw. nennen wir ${}^{m,\sigma}N_{\kappa}^{\lambda}(\bar{\omega}; \omega)$; ${}^{m,\sigma}\Xi_{\kappa}^{\lambda}(\bar{\omega}; \omega)$; ${}^{m,\sigma}O_{\kappa}^{\lambda}(\bar{\omega}; \omega)$.

§ 14. Fälle der Ausartung

In den bisherigen Entwicklungen hatten wir über den speziellen Wert des Moduls k nur die notwendige Voraussetzung gemacht, daß er kleiner als 1 ist. Hier werden wir die spezielle Annahme machen, daß der Wert des Moduls k

entweder Null oder 1 ist. Dabei wird sich zeigen, daß sich in den Formeln große Vereinfachungen anbringen lassen, so daß diese Fälle auch numerisch unschwer diskutiert werden können. Wir nehmen zunächst an, k sei gleich Null.

$k = 0$ bzw. $k' = 1$ bedeutet nach (4), daß die Größen p und q einander gleich werden. Geometrisch heißt dies, daß die beiden kleineren Achsen der Ellipsoide übereinstimmen, so daß diese in ein gestrecktes Rotationsellipsoid ausarten. Aus der Gleichung $k^2 s n^2 u + d n^2 u = 1$ entnehmen wir, daß für $k = 0$ $d n^2 u$ den Wert 1 annimmt, und dies in die Differentialgleichung (11) eingesetzt, ergibt:

$$(112) \quad \frac{d^3 f}{d q^3} - (\omega^2 + H + E) \cdot f = 0.$$

Dies aber ist nichts anderes als die Differentialgleichung für die trigonometrischen Funktionen. Die Forderung der Eindeutigkeit im Raume verlangt, daß

$$(113) \quad \omega^2 + H + E = \nu^2$$

wird, wo ν eine ganze Zahl bedeutet.

Dies Ergebnis befriedigt einerseits, nimmt andererseits auch Wunder. Denn die Differentialgleichung (11) galt für alle drei Koordinaten α , β , γ , und es ist ersichtlich, daß ein Produkt aus drei trigonometrischen Funktionen nicht ein Integral der Schwingungsgleichung in rotationselliptischen Koordinaten sein kann. Hier zeigt sich nun die Bedeutung der Tatsache, daß α , β , γ auf drei ganz verschiedene Intervalle beschränkt werden mußten. Auf S. 619 hatten wir bereits darauf hingewiesen, daß wir auch reelle Koordinaten einführen könnten, allerdings unter Aufgabe der bemerkenswerten Symmetrie. Hier aber brauchen wir die Asymmetrie, und deshalb soll die damals angedeutete Transformation hier durchgeführt werden.

Wir hatten auf S. 619 für γ das Intervall

$$-K < \gamma < -K + 2iK'$$

festgestellt. Zunächst bilden wir die Mitte dieses Intervalles auf den Nullpunkt ab, indem wir setzen: $\gamma' = \gamma + K - iK'$. Für γ' ist das Intervall rein imaginär, so daß wir jetzt durch die imaginäre Transformation von Jakobi¹⁾ auf ein rein reelles Intervall kommen. Es ist nämlich:

1) Whittaker, Watson, a. a. O. S. 505.

$$dn(\gamma' - K + iK'; k) = +i \cdot k' \cdot \frac{sn(\gamma'; k)}{cn(\gamma'; k)};$$

$$sn(i\eta; k) = i \cdot \frac{sn(\eta; k')}{cn(\eta; k')}.$$

Daraus folgt dann für beliebige Werte von k der Übergang von $dn(\gamma', k)$ in $-k'sn(\eta, k')$, wo für η das Intervall $-K' < \eta < +K'$ gefunden wird. Die Differentialgleichung (11) nimmt daher jetzt folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (\omega^2 k'^4 sn^4(\eta; k') + Ek'^2 sn^2(\eta; k') + H)f = 0.$$

Hier können wir nun den Übergang vornehmen, indem wir k' gleich 1 setzen. Es ist nun zu beachten, daß $sn(\eta; k')$ die zu

$$\eta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}}$$

inverse Funktion ist; diese aber geht für $k' = 1$ in den Arcus $\mathfrak{A}g$ über, so daß wir jetzt die folgende Differentialgleichung erhalten:

$$(114) \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} + (\omega^2 \mathfrak{A}g^4 \eta + E \mathfrak{A}g^2 \eta + H) \cdot f = 0.$$

Die Viertelperiode K' läßt sich als Funktion des Moduls k' als hypergeometrische Reihe darstellen. Es ist¹⁾:

$$K' = \frac{\pi}{2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k'^2\right).$$

(Übrigens gilt die gleiche Beziehung für K und k .) Die hypergeometrische Reihe ist innerhalb des Einheitskreises überall endlich, wächst aber mit Annäherung an diesen über alle Grenzen. Für $k' = 1$ ist daher $K' = \infty$ und das Intervall für η ist daher $-\infty \leq \eta \leq +\infty$.

Man sieht übrigens auch leicht auf dem gleichen Wege, daß K für $k = 0$ den Wert $\pi/2$ annimmt, und dies beweist, daß die Koordinate β für $k = 0$ in das Azimut φ übergeht.

Da der Wert von $\mathfrak{A}g \eta$ innerhalb des betrachteten Intervalles reell ist und zwischen -1 und 1 liegt, so kann man die Transformation

$$\mathfrak{A}g \eta = \cos \vartheta$$

1) Whittaker, Watson, a. a. O. S. 501.

durchführen. Bezeichnen wir $\cos \vartheta$ mit x , so können wir die Differentialgleichung (114) in folgende Form bringen:

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x(1-x^2) \frac{df}{dx} + [\omega^2 x^4 + Ex^2 + H] \cdot f = 0.$$

Ersetzen wir schließlich noch die Größe H durch E und ν [nach (113)], so ergibt sich die Gleichung, an die wir in diesem Paragraphen anzuknüpfen haben:

$$(115) \quad (1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} - \left[\omega^2 (1+x^2) + E + \frac{\nu^2}{1-x^2} \right] \cdot f = 0.$$

Lassen wir in dieser ω gegen Null gehen, so erhalten wir aus (115) die Differentialgleichung der Zugeordneten der Kugelfunktionen.

Um nun auch für die Koordinate α den entsprechenden Übergang zu finden, erinnern wir uns daran, daß der Mittelpunkt des Intervalles für γ vom Anfangspunkt des Intervalles für α um den Betrag $K + iK'$ entfernt war, daß andererseits für $h = 0$ $K = \frac{\pi}{2}$ und $K' = \infty$ unendlich wird. Daher wird $d n(\eta + K + iK')$ für $h = 0$ in den Ausdruck $\lim_{A \rightarrow \infty} \text{Cot}(\eta + A)$ übergehen; dieser aber ist gleich $e^{-2\eta}$. Doch empfiehlt es sich, die Transformation

$$e^{-2\eta} = \text{Cof } \alpha$$

durchzuführen, weil wir dann durch die Gleichung (115) das gesamte Problem beherrschen. Für das gestreckte Rotationsellipsoid gehen dann die Gleichungen (7) in folgende Form über:

$$(116) \quad \begin{cases} x = q \text{Cof } \alpha \cos \vartheta; & y = q \text{Sin } \alpha \sin \vartheta \cos \varphi; \\ & z = q \text{Sin } \alpha \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

Von den drei Kernen (20) und (20a) gehen zwei ineinander über, wenn wir $h = 0$ setzen, und wir erhalten:

$$(117) \quad \begin{cases} K_1(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) = K_3(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) = e^{i\omega \cos \vartheta \cos \vartheta_0}; \\ K_2(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) = e^{-i\omega \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \end{cases}$$

Der Kern (53) nimmt für diesen Grenzfall die Form

$$(118) \quad K_4(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) = \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 e^{i\omega \cos \vartheta \cos \vartheta_0}$$

an. Schließlich ist auch leicht zu zeigen, daß der Kern

$$(119) \quad K_5(\vartheta, \varphi; \vartheta_0, \varphi_0) = \sin^n \vartheta \sin^n \varphi \sin^n \vartheta_0 \sin^n \varphi_0 e^{i\omega \cos \vartheta \cos \vartheta_0}$$

Eigenfunktionen hat, die der Differentialgleichung (13) genügen, wenn man in ihr $h = 0$ setzt.

Die Integrale der Differentialgleichung (115) müssen sich, wie wir bemerkten, für $\omega = 0$ auf die Zugeordneten der Kugelfunktionen $P_n^\nu(x)$ reduzieren. Wir werden diese Integrale mit $p e_n^\nu(x)$ bezeichnen und ihnen dieselben Indizes geben wie der Zugeordneten, auf die sie sich reduzieren, wenn ω Null wird. Nun ist andererseits sicher z. B. $p e_{2n}^{2\nu}(\cos \vartheta) \cos 2\nu \varphi$ ein Integral der Differentialgleichung (13), wenn wir in ihr $k = 0$ setzen. Als solches aber bezeichnen wir es mit $R_{2n, \sigma}(\vartheta, \varphi)$. Der erste Index der Funktion $R(\vartheta, \varphi)$ stimmt mit dem unteren Index von $p e_{2n}^{2\nu}(x)$ überein; es fragt sich nur, in welcher Beziehung der obere Index 2ν von $p e_{2n}^{2\nu}(x)$ und der zweite Index σ von $R_{2n, \sigma}(\vartheta, \varphi)$ zueinander stehen. Dazu beachte man, daß der Index σ von $R_{2n, \sigma}(\vartheta, \varphi)$ angab, zu welcher der nach der Größe geordneten Wurzeln der Säkulargleichung (79a) die Funktion $R_{2n, \sigma}(\vartheta, \varphi)$ gehörte. Setzen wir nun in der Säkulargleichung $k = 0$, so reduziert sie sich auf eine Form, in der nur die Diagonalglieder von Null verschieden sind. Die Säkulargleichung nimmt daher die Form

$$\prod_{e=0}^n (\vartheta_e + \varepsilon_1 p_e) = 0$$

an, so daß die Wurzeln dieser Gleichungen gegeben sind durch

$$\varepsilon_1^{(e)} = - \frac{\vartheta_e}{p_e}.$$

Andererseits sieht man sofort, daß zu der Funktion

$$p e_{2n}^{2\nu}(\cos \vartheta) \cos 2\nu \varphi$$

die Wurzel $\varepsilon_1^{(e)}$ gehört, so daß nur noch zu entscheiden ist, welche Reihenfolge die $\varepsilon_1^{(e)}$ annehmen, wenn man sie der Größe nach ordnet. Dies aber ist leicht zu entscheiden, wenn man beachtet, daß für $k = 0$ die Größen ϑ_e den Wert

$$\pi \cdot \frac{(2n+2e)!}{(2n-2e)!} \cdot \frac{2(8n^2-8\nu^2+4n-1)}{(16n^2-1)(4n+3)}$$

die Größen p_e den Wert $\frac{2\pi}{4n+1} \cdot \frac{(2n+2e)!}{(2n-2e)!}$ annehmen [nach S. 664, 669 und den Gleichungen (60) und (72)]. So erhalten wir nämlich:

$$\varepsilon_1^{(e)} = - \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} \cdot (8n^2-8\nu^2+4n-1)$$

und der Wert dieser Größe wird mit wachsendem ν immer größer, da ja immer $n \geq \nu$ ist. Dadurch ist gezeigt, daß die natürliche Ordnung der ε_1 , d. h. die nach den oberen Indizes der Funktionen $p e_{2n}^{2\nu}(x)$ zugleich auch die Ordnung nach der Größe ist, und daraus folgt dann sofort die gesuchte Beziehung zwischen dem zweiten Index der Funktion $R_{2n,\sigma}(\vartheta, \varphi)$ und dem oberen Index der Funktion $p e_{2n}^{2\nu}(x)$:

$$(120) \quad p e_{2n}^{2\nu}(\cos \vartheta) \cos 2\nu \varphi = R_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi).$$

Analoges gilt auch für die anderen Funktionstypen:

$$(120a) \quad \begin{cases} p e_{2n+1}^{2\nu}(\cos \vartheta) \cos 2\nu \varphi = R_{2n+1,\nu}(\vartheta, \varphi); \\ p e_{2n}^{2\nu+1}(\cos \vartheta) \cos(2\nu+1)\varphi = S_{2n,\nu}(\vartheta, \varphi) \text{ usw.} \end{cases}$$

Wir wenden uns nunmehr den Integralgleichungen zu. Man sieht sofort, daß der Kern $e^{i\omega \cos \vartheta \cos \vartheta_0}$ nur die Funktionen $R_{n,0}(\vartheta, \varphi) = p e_n^0(\cos \vartheta)$ zu Eigenfunktionen haben kann, weil dies die einzigen sind, die von φ unabhängig sind. Für die $p e_n^0(x)$ finden wir also die Integralgleichung:

$$(121) \quad p e_n^0(x) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{i\omega xy} p e_n^0(y) dy.$$

Schreiten wir nun zur Berechnung z. B. der Funktion $p e_0^0(x)$, d. h. derjenigen, die sich für $\omega = 0$ auf die Kugelfunktion $P_0(x) = 1$ reduziert. Wir setzen also an

$$p e_0^0(x) = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} A_{2\sigma} P_{2\sigma}(x),$$

wo die $A_{2\sigma}$ Potenzreihen in ω ohne konstantes Glied sind. Mit diesem Ansatz finden wir sehr leicht:

$$(122) \quad A_{2\sigma} = (-1)^\sigma (4\sigma + 1) \lambda_0 \int_{-1}^{+1} \psi_{2\sigma}(\omega y) p e_0^0(y) dy.$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung

$$p e_0^0(0) = \lambda_0 \int_{-1}^{+1} \left\{ 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} A_{2\sigma} P_{2\sigma}(y) \right\} dy$$

der Eigenwert λ_0 :

$$(123) \quad \lambda_0 = \frac{1}{2} p e_0^0(0) = \frac{1}{2} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{A_{2\sigma}}{2} P_{2\sigma}(0),$$

oder da

$$P_{2\sigma}(0) = (-1)^{\sigma} \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma} \sigma! \sigma!}$$

ist:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma} \frac{A_{2\sigma} (2\sigma)!}{2^{2\sigma+1} \sigma! \sigma!}.$$

Da nun die Funktion $\psi_{2\sigma}$ als kleinste Potenz von ω die Potenz $\omega^{2\sigma}$ hat, so werden wir schließen, daß auch die gesuchten Koeffizienten $A_{2\sigma}$ als kleinste Potenz von ω die Größe $\omega^{2\sigma}$ haben, und wir machen den Ansatz:

$$A_{2\sigma} = \omega^{2\sigma} (a_{2\sigma} + b_{2\sigma} \omega^2 + c_{2\sigma} \omega^4 + \dots),$$

indem wir Potenzen von höherer als der $(2\sigma + 4)$. Ordnung unterdrücken. Weiter werden wir in (121) λ_0 ; $\psi_{2\sigma}(\omega y)$ und $p e_0^0(y)$ durch ihre ersten drei Glieder annähern und erhalten so:

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(-1)^{\sigma} \omega^{2\sigma} (a_{2\sigma} + b_{2\sigma} \omega^2 + c_{2\sigma} \omega^4)}{\sqrt{\pi(4\sigma + 1)}} \\ & = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (a_2 \omega^2 + b_2 \omega^4 + c_2 \omega^6) + \frac{3}{16} (a_4 \omega^4 + b_4 \omega^6 \dots) \right] \\ & \cdot \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{\omega^{2\sigma} y^{2\sigma}}{2^{2\sigma+1} \Gamma(2\sigma + \frac{1}{2})} - \frac{\omega^{2\sigma+2} y^{2\sigma+2}}{2^{2\sigma+3} \Gamma(2\sigma + \frac{3}{2})} \right. \\ & \left. + \frac{\omega^{2\sigma+4} y^{2\sigma+4}}{2^{2\sigma+5} \Gamma(2\sigma + \frac{5}{2})} \right\} \{ 1 + [a_2 \omega^2 + b_2 \omega^4 + c_2 \omega^6] P_2(y) \\ & + [a_4 \omega^4 + b_4 \omega^6 + \dots] P_4(y) \} dy. \end{aligned} \right.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich dann in verhältnismäßig einfacher Weise die Koeffizienten $a_{2\sigma}$; $b_{2\sigma}$; $c_{2\sigma}$ ausrechnen; denn die Gleichung (124) besagt natürlich, daß die Koeffizienten gleicher Potenzen von ω auf beiden Seiten gleich sein müssen. Um diese Vergleichung durchzuführen, brauchen wir nur noch die folgenden Formeln, unter denen auch die ist, die man zur Berechnung der $p e_{2n+1}^0(x)$ mit ungeradem Index gebraucht:

$$(125) \quad \begin{cases} \int_{-1}^{+1} y^{2p} P_{2k}(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{wenn } p < k \\ \sqrt{\pi} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p-k)! \Gamma(p+k+\frac{1}{2})} & \text{sonst.} \end{cases} \\ \int_{-1}^{+1} y^{2p+1} P_{2k+1}(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{wenn } p < k \\ \sqrt{\pi} \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p-k)! \Gamma(p+k+\frac{3}{2})} & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Formeln beweist man, indem man in der Gleichung

$$2i^n \psi_n(\varrho) = \int_{-1}^{+1} e^{i\varrho z} P_n(z) dz$$

beide Seiten durch ihre nach Potenzen von ϱ fortschreitenden Reihen ersetzt und dann die Koeffizienten gleicher Potenzen von ϱ gleichsetzt.

Ganz ähnlich verfährt man zur Berechnung der Funktion $p e_n^0(x)$. Diese reduziert sich definitionsgemäß auf die Kugelfunktion $P_n(x)$, wenn man $\omega = 0$ setzt. Daher ist also in der nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe nicht mehr A_0 sondern A_n gleich 1 zu setzen. Dann gestaltet sich die Berechnung des Eigenwertes λ_n in folgender Weise: Man bilde die Funktion

$$\Phi_n(x) = \sum_{\sigma=0}^m (-1)^\sigma \frac{(2n-2\sigma)!}{2^n \cdot \sigma! (n-\sigma)! (n-2\sigma)!} \left(\frac{1}{i\omega} \right)^{n-2\sigma} \frac{d^{n-2\sigma} p e_n^0(x)}{dx^{n-2\sigma}};$$

$m = \frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, je nachdem n gerade oder ungerade.

Da

$$P_n(x) = \sum_{\sigma=0}^m (-1)^\sigma \frac{(2n-2\sigma)!}{2^n \cdot \sigma! (n-\sigma)! (n-2\sigma)!} x^{n-2\sigma}$$

ist, läßt diese Funktion sich folgendermaßen darstellen:

$$\Phi_n(x) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{i\omega xy} P_n(y) p e_n^0(y) dy.$$

Setzen wir jetzt $x = 0$, so erhalten wir wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen:

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2}) \Phi_n(0).$$

Im übrigen vollzieht sich die Rechnung in der gleichen Weise.

Als Beispiel einer auf diesem Wege gewonnenen Eigenfunktion führen wir an

$$(126) \left\{ \begin{aligned} p e_0^0(x) &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma} (4\sigma+1) \sqrt{\pi}}{2^{2\sigma+1} (2\sigma+1)} \cdot \left\{ \frac{\omega^{2\sigma}}{H(2\sigma+\frac{1}{2})} - \frac{\sigma \cdot \omega^{2\sigma+2}}{3^2 \cdot H(2\sigma+\frac{3}{2})} \right. \\ &+ \frac{(1296 \cdot 8 \cdot \sigma^5 + 6778 \cdot 8 \cdot \sigma^4 - 9117 \cdot 4 \cdot \sigma^3 - 24663 \cdot \sigma^2 - 16065 \cdot \sigma) \omega^{2\sigma+4}}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot (2\sigma+3)(2\sigma+5) H(2\sigma+\frac{5}{2})} + \dots \Big\} \\ &\cdot P_{2\sigma}(x). \end{aligned} \right.$$

Die Berechnung der Funktionen $p e_n^v(x)$ gelingt mit Hilfe des Kernes:

$$e^{-\omega \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Aus der Integralgleichung

$$p e_n^v(x) \cos v \varphi = \tilde{\lambda}_n^v \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} e^{-\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} \cdot p e_n^v(y) \cos v \varphi_0 dy d\varphi_0$$

folgt, wenn man die Integration über φ_0 ausführt und dann noch durch $\cos v \varphi$ dividiert:

$$(127) \quad p e_n^v(x) = \tilde{\lambda}_n^v \int_{-1}^{+1} J_v(i\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) p e_n^v(y) dy.$$

$$\tilde{\lambda}_n^v = 2\pi i^v \lambda_n^v.$$

Um diese Integralgleichung in der gleichen Weise zu behandeln wie die Gleichung (121), brauchen wir vor allem die Entwicklung des Kernes $J_v(i\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2})$ nach den Zugeordneten $P_n^v(x)$, wo oberer Index der Kugelfunktion und Index der Zylinderfunktion übereinstimmen. Es handelt sich also um eine Entwicklung bei unveränderlichem oberem Index der Zugeordneten. Die Koeffizienten einer solchen Entwicklung finden wir durch das Integral

$$\frac{2}{2n+1} \frac{(n+v)!}{(n-v)!} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n^v(x) dx,$$

wo $f(x)$ die zu entwickelnde Funktion bedeutet. Auf unseren Fall angewandt, gelangen wir zu dem Integral

$$\int_{-1}^{+1} J_v(i\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) P_n^v(x) dx,$$

dies aber haben wir — sogar in einer Verallgemeinerung — zu berechnen gelernt [Gleichung (30), in der $s = 0$ zu setzen ist]. Wir können die eben angewandte Methode auch hier benutzen, so daß sich eine nochmalige explizite Darstellung erübrigt. Wir brauchen zur Durchführung der Rechnung die Formeln:

$$\begin{aligned}
 & J_{2m+1}(i\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) \\
 &= - \sum_{\sigma=m}^{\infty} \frac{(2\sigma-2m)!(2\sigma+\frac{3}{2})}{2^{2\sigma}(\sigma-m)!(\sigma+m+1)!} \psi_{2\sigma+1}(i\omega \sqrt{1-y^2}) P_{2\sigma+1}^{2m+1}(x) \\
 & J_{2m}(i\omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) \\
 &= \sum_{\sigma=m}^{\infty} \frac{(2\sigma-2m)!(2\sigma+\frac{1}{2})}{2^{2\sigma-1}(\sigma-m)!(\sigma+m)!} \psi_{2\sigma}(i\omega \sqrt{1-y^2}) P_{2\sigma}^{2m}(x) \\
 128) & \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}^{2k} P_{2n}^{2m}(x) dx \\ &= \frac{(k-m)!(k+m)!(2n+2m)! \sqrt{\pi}}{2^{2n}(n+m)!(n-m)!(k-n)! \Gamma(k+n+\frac{1}{2})} \text{ wenn } k \geq n \\ & \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}^{2k+1} P_{2n+1}^{2m+1}(x) dx \\ &= \frac{(k-m)!(k+m+1)!(2n+2m+2)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1}(n+m+1)!(n-m)!(k-n)! \Gamma(k+n+\frac{3}{2})} \text{ wenn } k \geq n \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wenn $m \leq k < n$ ist, sind die beiden letzten Integrale Null. Wir erhalten auf diesem Wege z. B.:

$$\begin{aligned}
 (129) \quad & p e_1^1(x) = \sqrt{\pi} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} \\
 & \cdot \left\{ \frac{3\omega^{2\sigma}}{2^{2\sigma+3} \Gamma(2\sigma+\frac{1}{2})(\sigma+\frac{1}{2})(\sigma+\frac{3}{2})} - \frac{9\omega^{2\sigma+2} \cdot \sigma(4\sigma+3)}{5^2 \cdot 2^{2\sigma+4} \Gamma(2\sigma+\frac{3}{2})(\sigma+\frac{1}{2})(\sigma+\frac{3}{2})} \right. \\
 & + \frac{\omega^{2\sigma+4}(4\sigma+3) \cdot \sigma \cdot (1024944 \cdot \sigma^3 + 6203016 \cdot \sigma^2 + 179925 \cdot \sigma + 397560)}{2^{2\sigma+7} \cdot 5^4 \Gamma(2\sigma+\frac{1}{2})(\sigma+\frac{1}{2})(\sigma+\frac{3}{2})(\sigma+\frac{5}{2})(\sigma+\frac{7}{2})} \\
 & \left. + \dots \right\} P_{2\sigma+1}^1(x).
 \end{aligned}$$

Durch die Integralgleichung (127) erhalten wir nur diejenigen der $p e_n^r(x)$, bei denen die Differenz zwischen dem unteren und dem oberen Index eine gerade Zahl ist. Zur Berechnung der noch fehlenden benutzt man z. B. den Kern

$$(130) \quad x \cdot y \cdot J_{\nu}(i \omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2})$$

oder auch einen der Kerne (119).

Zur Auswertung des eben genannten Kernes brauchen wir Formeln, die den Gleichungen (128) analog sind. Diese lassen sich leicht aus den Gleichungen (128) herstellen, wenn man die Gleichung (60) auf S. 657 beachtet. Wir führen nur eine der so zu gewinnenden Formeln hier an:

$$(131) \quad \left\{ \begin{aligned} & x \cdot y \cdot J_{2m+1}(i \omega \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) \\ &= \frac{i y}{\omega \sqrt{1-y^2}} \sum_{\sigma=m}^{\infty} \frac{(2\sigma-2m+1)!(2\sigma+\frac{5}{2})}{2^{2\sigma}(\sigma-m)!(\sigma+m+1)!} \\ & \quad \cdot \psi_{2\sigma+2}(i \omega \sqrt{1-y^2}) P_{2\sigma+2}^{2m+1}(x). \end{aligned} \right.$$

Bei Betrachtung der Formel (129) könnte man über die in dem dritten Summanden auftretenden sehr großen Zahlen erstaunt sein und Zweifel an der Konvergenz hegen. Es sei daher hier eingeschaltet, daß c_3 von der Größenordnung $\frac{1}{18}$ ist, während bereits c_5 kleiner als $4 \cdot 10^{-5}$ ist.

Die Funktionen $p e_n^*(x)$ gestatten nicht nur eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bzw. nach den Zugeordneten, sondern auch nach den Zylinderfunktionen $\psi_n(\omega x)$. Diese Reihenentwicklung ist der vollkommen analog, die wir für die Funktionen $R_{n,\nu}^{(1)}(\alpha)$ usf. im Paragraphen 11 gefunden haben. Wir wollen die Entwicklung nach Zylinderfunktionen für die $p e_n^0(x)$ kurz ableiten. Dazu setzen wir in die Integralgleichung (121) unter dem Integralzeichen für $p e_n^0(y)$ die bereits gefundene Entwicklung nach Kugelfunktionen an. Auch entwickeln wir den Kern nach Kugelfunktionen der Variablen y und integrieren dann gliedweise. So ergibt sich, wie man leicht nachrechnet:

$$(132) \quad \left\{ \begin{aligned} p e_{2n}^0(x) &= 2 \lambda_{2n} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} A_{2\sigma} \psi_{2\sigma}(\omega x); \\ p e_{2n+1}^0(x) &= 2 i \lambda_{2n+1} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} A_{2\sigma+1} \psi_{2\sigma+1}(\omega x); \end{aligned} \right.$$

wo die Koeffizienten A_{σ} die gleichen sind, die auch bei der Entwicklung nach den Kugelfunktionen auftreten. Ferner gibt es Entwicklungen nach den ψ -Funktionen mit dem Argument

$i\omega\sqrt{1-x^2}$. Um diese zu erhalten, würde man die Kerne $J_\nu(i\omega\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ bzw. $x\cdot y\cdot J_\nu(i\omega\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ benutzen, und um die $pe_n''(x)$ nach den ψ -Funktionen mit dem Argument ωx zu entwickeln, verwendet man die aus (119) folgenden Kerne $(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})^\nu e^{i\omega xy}$. Diese ergeben die gesuchten Reihenentwicklungen, in denen jede Zylinderfunktion noch mit dem Faktor $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^\nu$ multipliziert ist.

In analoger Weise wie im Paragraphen 13 zeigt man dann, daß man zu Funktionen der zweiten Art gelangt, wenn man die Zylinderfunktionen ψ_n durch die Funktionen Ψ_n ersetzt. Wir erhalten so Reihen, die genau wie früher überall außerhalb des Einheitskreises konvergieren und durch Summation in den Einheitskreis hinein analytisch fortgesetzt werden können. Diese Funktionen haben in den Punkten 1 und -1 einen Pol. Wir bezeichnen sie mit $qe_n''(x)$. Den im Paragraphen 13 durch Summation gewonnenen Integraldarstellungen für die allgemeineren Funktionen können wir hier die folgenden Ausdrücke an die Seite stellen:

$$(133) \quad qe_n''(x) = \text{const.} \sqrt{1-x^2}^\nu \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-y^2}^\nu \frac{\Psi_\nu[\omega(x-y)]}{[\omega(x-y)]^\nu} pe_n''(y) dy.$$

Die nach Zylinderfunktionen fortschreitenden Reihen werden wir im folgenden immer dann benutzen, wenn das Argument der Funktionen $pe_n''(x)$ größer als 1 ist. Denn die Zylinderfunktionen sind auch für unendlich große reelle Werte ihres Argumentes noch endlich, so daß die mit ihnen gebildeten Reihen auch noch für unendlich großes Argument die Diskussion über das Verhalten der Funktionen $pe_n''(x)$ gestatten.

Es sei noch kurz darauf hingewiesen, daß ein Teil der in diesem Paragraphen abgeleiteten Ergebnisse bereits von Abraham und in größerer Allgemeinheit von Niven¹⁾, allerdings auf einem ganz anderen Wege gefunden worden sind, wie wir auch kurz in der Einleitung andeuteten.

Ein Integral der Schwingungsgleichung ist nach den jetzt angestellten Überlegungen das Produkt

$$(134) \quad pe_n^m(\zeta_0 \eta) pe_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi.$$

1) Vgl. die Literaturangaben auf S. 609 und 610.

Dabei denken wir uns die Funktion $pe_n^m(\cos \vartheta)$ durch ihre nach Zylinderfunktionen fortschreitende Reihe, die Funktion $pe_n^m(\cos \vartheta)$ durch die Kugelfunktionsreihe dargestellt. Wir fragen, was aus dem Produkt wird, wenn wir vom Rotationsellipsoid zur Kugel übergehen, d. h. wenn wir in $\omega = \frac{q \cdot r}{c}$ die Größe q gegen Null gehen lassen. Offenbar wird dann auch ω gleich Null, und damit verschwinden in der Reihe nach Kugelfunktionen alle Koeffizienten A_σ^m bis auf einen A_n^m , der für $\omega = 0$ gleich 1 wird. Das Produkt $pe_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi$ geht daher in die Kugelflächenfunktion $P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi$ über. Nicht ganz so einfach ist zu entscheiden, was aus der Zylinderfunktionsreihe wird. Zwar reduziert auch sie sich auf ein einziges Glied, da ja die Entwicklungskoeffizienten die gleichen sind wie in den Kugelfunktionsreihen. Es bleibt somit von dieser Funktion nur $\psi_n(\omega \cos \vartheta)$, doch steht jetzt auch im Argument die gegen Null gehende Größe ω , so daß untersucht werden muß, was $\lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{r}{c} \cos \vartheta \right)$ bedeutet. Man beachte dazu, daß q gewissermaßen das natürliche Längenmaß ist und η das Ergebnis einer Messung mit diesem. Wird das Maß kleiner, so wird natürlich das Messungsergebnis größer, d. h. η wächst, wenn q gegen Null geht, über alle Grenzen. Andererseits rechnet man aus (116) leicht nach, daß

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = q \cdot \sqrt{\cos^2 \eta - \cos^2 \vartheta}$$

ist. Für sehr große Werte von η unterscheidet sich daher $q \cos \eta$ beliebig wenig von der Größe r , der Entfernung eines Punktes vom Nullpunkt des Koordinatensystems, so daß sich ergibt: $\lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{r}{c} \cos \vartheta \right) = \frac{r}{c}$. Damit finden wir also durch Grenzübergang aus dem gestreckten Rotationsellipsoid ein Integral der Schwingungsgleichung für Polarkoordinaten:

$$\psi_n \left(\frac{r}{c} \right) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi.$$

Dies aber sind in der Tat die für diesen Spezialfall bekannten Integrale.

Der andere Grenzfall, $k = 1$, ist ohne weitere Überlegung auf den eben behandelten zurückführbar. Dazu betrachten

wir eine feste Ebene im Raume, die wir zur xy -Ebene machen. In ihr zeichnen wir eine Ellipse, deren große Achse mit der x -Achse und deren kleine Achse mit der y -Achse zusammenfällt. Ist q der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse, so kann man, wie Sieger¹⁾ zeigte, x und y ausdrücken durch die folgenden elliptischen Koordinaten:

$$x = q \operatorname{Cof} \eta \cos \vartheta; \quad y = q \operatorname{Sin} \eta \sin \vartheta.$$

Dreht man jetzt die Ellipse um die x -Achse, so kann man in der Ebene senkrecht zu dieser ein Azimut φ einführen, mit dessen Hilfe sich die rechtwinkligen Raumkoordinaten x, y, z gerade gemäß den Gleichungen (116) berechnen lassen. In der Tat ist bei der Drehung der Ellipse ein gestrecktes Rotationsellipsoid beschrieben worden. Anders wird aber die Sache, wenn wir die Drehung um die y -Achse ausführen. Hier wird ein abgeplattetes Rotationsellipsoid beschrieben, und die diesem entsprechenden Koordinaten sind die folgenden:

$$y = q \operatorname{Sin} \eta \sin \vartheta; \quad x = q \operatorname{Cof} \eta \cos \vartheta \cos \varphi; \quad z = q \operatorname{Cof} \eta \cos \vartheta \sin \varphi$$

oder, wenn man die x -Achse als Drehachse benutzt:

$$(116a) \quad \begin{cases} x = q \operatorname{Sin} \eta \sin \vartheta; & y = q \operatorname{Cof} \eta \cos \vartheta \cos \varphi; \\ & z = q \operatorname{Cof} \eta \cos \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

Gleichung (116) und (116a) können zu einer zusammengefaßt werden, durch folgende Gleichung:

$$(116b) \quad \begin{cases} x = q \cos a \cos \Theta; & y = -iq \sin a \sin \Theta \cos \varphi; \\ & z = -iq \sin a \sin \Theta \sin \varphi. \end{cases}$$

Im Falle des gestreckten Rotationsellipsoides läuft dann a von 0 bis $i\infty$, Θ aber von 0 bis π , im anderen Falle läuft a von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2} + i\infty$ und Θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$, während die Größen q durch iq zu ersetzen sind.

Wir haben hiermit das Eigenwertproblem, das an die Schwingungsgleichung anknüpft, vollständig durchgeführt und sind jetzt in der Lage, das physikalische Beugungsproblem in Angriff zu nehmen.

1) B. Sieger, Ann. d. Phys. 27. S. 567. 1908.

Zusammenfassung des mathematischen Teiles

Im § 1 werden zunächst in der bekannten Weise die elliptischen Koordinaten λ, μ, ν eingeführt. Von diesen geht man über zu einer anderen Art elliptischer Koordinaten, die physikalisch als Potentiale der Flächen zweiten Grades gedeutet werden können, die also der Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Die Umrechnungsformeln der kartesischen Koordinaten auf diese wird gegeben. Dann wird (§ 2) die Form angegeben, die die Schwingungsgleichung in diesen Koordinaten annimmt. Wir suchen spezielle Integrale der Schwingungsgleichung, die ein Produkt dreier einfacher Funktionen sind; jede dieser Funktionen soll nur von einer der drei Koordinaten α, β, γ abhängen. Durch diesen Ansatz wird man zu drei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei Funktionen geführt, in denen zunächst je zwei, also insgesamt sechs, willkürliche Konstanten auftreten. Die Form der drei Differentialgleichungen ist die gleiche. Die Bedingung, daß diese drei Differentialgleichungen wirklich der Schwingungsgleichung äquivalent sein sollen, reduziert diese sechs Konstanten auf zwei: je drei sind immer gleich. Daraus erkennt man: die drei Funktionen, deren Produkt ein Integral der Schwingungsgleichung ist, genügen einer und derselben Differentialgleichung [Gleichung (11)]. Das verschiedenartige Verhalten dieser Funktionen wird dadurch gewährleistet, daß die Argumente α, β, γ auf verschiedene Intervalle beschränkt sind.

Zuerst betrachten wir das Produkt $f(\beta) \cdot f(\gamma)$, wo die Argumente β, γ auf die im § 1 näher bestimmten Intervalle beschränkt sind. Dieses Produkt muß, wenn anders es überhaupt zur Lösung des Problems in Frage kommen soll, gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen, die man am besten formulieren kann, wenn man das Produkt nicht als Funktion von β und γ , sondern von den „Winkelkoordinaten“ β, φ betrachtet. Als Funktion dieser Koordinaten ist das Produkt ein Integral der Differentialgleichung (13). Die hier noch auftretende Konstante E' soll so bestimmt werden, daß das Integral auf einer Kugelfläche endlich eindeutig und stetig ist.

Die Differentialgleichung (13) in Verbindung mit dem allgemeinsten Integral der Schwingungsgleichung [Gleichung (15)] führt zu mehreren Integralgleichungen, deren Eigenfunktionen

die gesuchten Integrale der Differentialgleichung (13) sind. Aus diesen Integralgleichungen folgt dann die Existenz von Reihen, die gleichmäßig konvergent auf einer Kugelfläche, nach Kugelflächenfunktionen fortschreiten und die gesuchten Funktionen darstellen. Bei der Darstellung dieser Reihen ergibt sich eine Klassifikation der gesuchten Funktionen: Acht verschiedene Reihentypen werden für sie gefunden.

Im § 10 wird das Ritzsche Verfahren auf unsere Differentialgleichung (13) angewandt. Durch geschickte Ordnung der dabei auftretenden Determinanten fällt der gewöhnlich diesem Verfahren anhaftende Übelstand, nur Näherungsergebnisse zu liefern, fort, und wir können den Satz exakt gewinnen, daß alle Eigenwerte E' unserer Differentialgleichung einfach sind. Mit diesem Satze gelingt weiter leicht die Angabe der Integrale der Differentialgleichung (11). Für diese findet man Reihen, die nach Zylinderfunktionen fortschreiten. Diese konvergieren auch in dem Intervall noch gleichmäßig, das wir für das Argument α angegeben haben. Daher liefern diese Reihen präzise Aussagen über das Verhalten unserer Funktionen im Unendlichen. Der § 12 bringt eine Darstellung der Integrale zweiter Art der Differentialgleichung (11); diese werden bei der Darstellung der Beugungswelle Verwendung finden. Der § 14 behandelt den Spezialfall, der durch das Vorhandensein einer Symmetrieachse im Koordinatensystem gekennzeichnet ist.

II. Teil

Das Beugungsproblem

§ 15. Präzisierung der Aufgabe; Koordinatensysteme; Hertzscher Vektor

Die Aufgabe, die in diesem zweiten Teil behandelt werden soll, können wir so aussprechen: In ein beliebig kompliziertes elektromagnetisches Feld, das im Endlichen keine Singularitäten enthält, werde ein materieller Körper von ellipsoidischer Oberfläche hineingebracht. Die Materialkonstanten, Dielektrizität und Leitfähigkeit seien bekannt. Die Größe des Körpers sei mit der Wellenlänge des einfallenden Lichtes vergleichbar. Zu untersuchen ist der Zustand, der von dem Körper hervorgerufen wird.

Ein Koordinatensystem, das sich als nächstes zur Fixierung der Raumpunkte darbietet, ist durch die drei großen Achsen des Ellipsoides bestimmt. Wir können z. B. festsetzen, daß das Koordinatensystem rechtshändig sein, daß die x -Achse mit der größten, die z -Achse mit der kleinsten Achse des Ellipsoides übereinstimmen soll. Zwar ist auch dadurch die Lage eines Koordinatensystems noch nicht eindeutig bestimmt, weil sich im allgemeinen mehrere solche finden lassen, die diesen Bedingungen genügen; doch spielt dies keine Rolle, da wir unter den möglichen uns eines willkürlich aussuchen dürfen, und wir wollen annehmen, daß dies geschehen sei. Die Punkte des Raumes haben in bezug auf dieses Koordinatensystem die Koordinaten x, y, z . Die Oberfläche des beugenden Ellipsoides ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo a, b, c drei uns bekannte Größen sind. Suchen wir diese Gleichung mit der Definitionsgleichung der elliptischen Koordinaten (§ 1) zu vergleichen, so finden wir:

$$p = a; \quad p = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad q = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Mit p und q sind uns dann auch die Moduln unserer elliptischen Funktionen gegeben [vgl. Gleichung (4)]. In den Koordinaten α, β, γ , wie sie auf S. 614 eingeführt wurden, schreibt sich dann die Gleichung für die Oberfläche des beugenden Ellipsoides in der einfachen Form:

$$\alpha = \alpha_0,$$

und der Wert der Konstanten α_0 wird durch folgende Gleichung bestimmt [Gleichung (5)]:

$$(135) \quad a = q \cdot dn \alpha_0; \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} = dn \alpha_0.$$

Der Wert des Quotienten $\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}$ ist immer größer als 1 und auch reell, da voraussetzungsgemäß a größer als c ist. Daher wird durch diese Gleichung auf der imaginären α -Achse zwischen 0 und iK' der Wert von α_0 eindeutig definiert.

Die Maxwellschen Gleichungen

$$\epsilon \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{x} \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}; \quad \mu \mathfrak{H} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}; \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

gehen für zeitlich periodische Zustände (Zeitfaktor $e^{i\nu t}$) in folgende Form über:

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{i\varepsilon\nu + 4\pi\kappa}{c} \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{H}; \quad -\frac{i\mu\nu}{c} \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{E}; \\ \text{div } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0. \end{array} \right.$$

Ein Integral dieser Gleichungen erhält man aus einem Vektor \mathfrak{P} , dem Hertzschen Vektor, dessen rechtwinklige Komponenten der Schwingungsgleichung $\Delta \mathfrak{P} + \frac{\nu^2}{c^2} \mathfrak{P} = 0$ genügen, dadurch, daß man auf ihn die Operation rot bzw. rot rot anwendet. Es ist:

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{P}; \quad \sigma \mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{P}; \quad \sigma = \frac{i\varepsilon\nu + 4\pi\kappa}{c}.$$

Ein anderes Integral erhält man allein durch Vertauschung von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} .

In den älteren Arbeiten zur mathematischen Theorie der Beugung wird der Übergang zum Hertzschen Vektor vermieden. Dort geht man so vor, daß man für die zur Oberfläche des beugenden Körpers normalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke aus den Maxwell'schen Gleichungen durch Elimination der anderen Komponenten je eine partielle Differentialgleichung herleitet. Prinzipiell würde wohl auch in diesem Falle dieser Weg gangbar sein. Hertzfeld z. B., von dem der erste und bisher einzige Versuch zur Theorie der Beugung an Ellipsoiden herrührt, ist ihn gegangen, wenigstens für den speziellen Fall des Rotationsellipsoides, — der allgemeinste Fall ist nie in Angriff genommen worden. In der Hertzfeldschen Arbeit macht sich aber außerordentlich störend bemerkbar, daß die auf diesem Wege erhaltene Differentialgleichung nicht mehr separierbar ist, d. h. ihre Integrale sind nicht mehr durch Produkte aus drei Funktionen je einer Raumkoordinate darstellbar. Bereits für den Fall unendlich großer Leitfähigkeit wird die Durchführung der Rechnung außerordentlich kompliziert. Ein wirklicher Fortschritt konnte nur dann erzielt werden, wenn es gelang, eine Differentialgleichung der Betrachtung zugrunde zu legen, die in dem eben erklärten Sinne separierbar ist. Eine solche ist aber die Schwingungsgleichung und Integrale dieser sind die rechtwinkligen Komponenten des Hertzschen

Vektors. Andererseits sind die elliptischen Koordinaten wichtig für die Grenzbedingungen. Diese sind ja die Forderung nach stetigen Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} auf der Oberfläche des beugenden Ellipsoides. Welch einfache Form die Gleichung der Oberfläche in elliptischen Koordinaten annimmt, hatten wir gesehen. Dies ist der Grund für die Einführung der elliptischen Koordinaten. Somit handelt es sich darum, Beziehungen herzustellen zwischen den rechtwinkligen Komponenten des Hertzschen Vektors und den elliptischen Komponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} . Diese Beziehungen müssen hinreichen, um aus den elektromagnetischen Grenzbedingungen die rechtwinkligen Komponenten des Hertzschen Vektors eindeutig zu bestimmen, wenn dasjenige Feld bekannt ist, das geherrscht hat, bevor wir den beugenden Körper hineinbrachten. Doch soll gleich hier bemerkt werden, daß sich gerade diese Forderung im allgemeinen nicht hat erfüllen lassen. Die Grenzbedingungen wurden so kompliziert, daß kaum eine Aussicht auf Durchführung bestand. Nur für den Fall absoluter Leitfähigkeit erwies sich die Benutzung des Hertzschen Vektors als zweckmäßig. Der allgemeine Fall läßt sich dadurch behandeln, daß man direkt die rechtwinkligen Komponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} benutzt; dann hat man allerdings noch den Divergenzbedingungen zu genügen. Die Einzelheiten dieses Weges sind später ausgeführt.

Der mathematische Ausdruck des ursprünglichen Feldes, das geherrscht hat, bevor wir den beugenden Körper hineinbrachten, soll singularitätenfrei sein. Die Abhängigkeit von der Zeit ist periodisch mit der Frequenz ν . Den allgemeinsten Ausdruck für ein solches Feld hatten wir bereits in der Gleichung (15) aufgeschrieben. Diesem wollen wir eine etwas andere Form geben:

$$\left\{ F(x, y, z) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i \frac{\nu}{c} (x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} \cdot f(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \right.$$

Über die Winkelfunktion machen wir die Voraussetzung, daß sie sich in eine auf einer Kugeloberfläche gleichmäßig konvergente, nach den Funktionen $R_{n,m}(\vartheta_0, \varphi_0)$; $S_{n,m}(\vartheta_0, \varphi_0)$; $T_{n,m}(\vartheta_0, \varphi_0)$;

$U_{n,m}(\vartheta_0, \varphi_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Wir wollen annehmen es sei:

$$f(\vartheta_0, \varphi_0) = \sum_n \sum_m \mathcal{S} \tilde{r}_{n,m} R_{n,m}(\vartheta_0, \varphi_0).$$

Dann ergibt sich durch gliedweise Integration eine Reihe für eine Komponente des Hertzschen Vektors; wenn man noch die Gleichung (107) beachtet:

$$(137) \quad \left\{ \begin{aligned} P(x, y, z) &= \sum_n \sum_m \mathcal{S} r e_{n,m} R_{n,m}^{(1)}(\alpha) R_{n,m}(\vartheta, \varphi); \\ r e_{n,m} &= r_{n,m} \cdot \tilde{r}_{n,m}. \end{aligned} \right.$$

Durch eine einzige Komponente des Hertzschen Vektors ist bereits ein möglicher elektromagnetischer Zustand bestimmt. Die Hinzunahme einer zweiten und einer dritten Komponente würde je ein anderes mögliches Feld geben, die sich dem ersten überlagern, ohne es zu stören. Es ist daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, der Hertzsche Vektor des ursprünglichen Feldes habe nur eine einzige Komponente; der allgemeine Fall geht dann durch Superposition dreier spezieller Felder hervor. Im folgenden soll daher angenommen werden, daß das ursprüngliche Feld sich aus einer einzigen Komponente des Hertzschen Vektors angeben läßt. Weiter nehmen wir an, daß das Feld durch (137) gegeben sei.

§ 16. Die Erfüllung der Grenzbedingungen

Das Beugungsfeld muß im Unendlichen verschwinden und darf dort nur divergierende Kugelwellen darstellen. Der analytische Ausdruck für eine Kugelwelle ist, wie wir hier beweislos bemerken wollen, der folgende:

$$\Phi(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{e^{-i \frac{v}{c} r}}{r}.$$

Daher dürfen für die Beugungswelle nur solche Ansätze gemacht werden, die im Unendlichen in diesen Ausdruck übergehen. Es ist nun unschwer einzusehen, daß die im § 12 eingeführten Integrale der zweiten Art diese Eigenschaft haben. Wir wollen den Beweis für diese Behauptung für die in der Gleichung (101) dargestellte Funktion $R_{2n,m}^{(2)}(\alpha)$ kurz durchführen.

In der Theorie der Besselschen Funktionen leitet man für die Zylinderfunktionen eine asymptotische Darstellung her, die Auskunft über das Verhalten der Funktionen bei sehr großem Argument gibt. Diese Darstellungen sind im allgemeinen semikonvergente Reihen, die an geeigneter Stelle abgebrochen werden müssen, dort, wo der Fehler klein ist. Diese Reihen brechen nun dann von selbst an endlicher Stelle ab und machen daher Fehlerabschätzungen überflüssig, wenn der Index der Zylinderfunktionen ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Dieser Fall aber liegt gerade hier vor; die Funktionen $\Psi_n(x)$ sind ja, wie wir gezeigt haben, abgesehen von dem Faktor $\frac{\text{const}}{\sqrt{x}}$, die Hankelschen Zylinderfunktionen $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$, für die sich folgende Darstellung ergibt¹⁾:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-ix + \frac{n+1}{2}\pi}}{x} (1 + R_n(x)),$$

wo

$$R_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(n-1)!} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^{6m-2} H(m-\frac{1}{2})} \left\{ \binom{n-1}{m} (n+m+1)! \left(\frac{1}{ix}\right)^{2m} + 4 \binom{n-1}{m-1} (n+m)! \left(\frac{1}{ix}\right)^{2m-1} \right\}$$

bedeutet. Diese Darstellung der Funktionen $\Psi_n(x)$ setzen wir dann in die Gleichung (101) ein. Es läßt sich nun zeigen, daß die Reihe der „Reste“

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} R_{2n}(x)$$

außerhalb des Einheitskreises gleichmäßig konvergiert und daher mit wachsendem Argument gegen Null geht, weil jeder der „Reste“ dies tut. Daraus folgt dann für sehr großes Argument für $R_{2n,m}^{(2)}(\alpha)$ die asymptotische Darstellung:

$$R_{2n,m}^{(2)}(\alpha) \sim \text{const} \frac{e^{-i\omega d n \alpha}}{d n \alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}.$$

Es soll nur noch darauf hingewiesen werden, daß für sehr große reelle $d n \alpha$ das Produkt $q d n \alpha$ sich von der Größe r (Entfernung Aufpunkt–Nullpunkt) beliebig wenig unterscheidet.

1) G. N. Watson, Treatise on Theory of Bessel Functions, S. 220. Cambridge 1922.

Da ferner $R_{2n,m}^{(2)}(\alpha) R_{2n,m}(\vartheta, \varphi)$ ein Integral der Schwingungsgleichung ist, so erkennen wir, daß dies für Werte von α , die sich sehr wenig von iK' unterscheiden, in den Ausdruck für eine divergierende Kugelwelle übergeht. Weiter sieht man auch leicht, daß die Integrale der zweiten Art allein diese Eigenschaft haben; denn die Funktionen $\psi_n(x)$, mit denen die Funktionen der ersten Art gebildet worden sind, haben die folgende asymptotische Darstellung:

$$\psi_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{ix}}{x} (1 + R_n(-x)) \pm \frac{e^{-ix}}{x} (1 + R_n(x)) \right].$$

Hier erkennt man, daß neben der divergierenden Welle auch eine einfallende vorhanden ist; daraus ergibt sich dann die aufgestellte Behauptung.

Für die Beugungswelle werden wir daher zwangsläufig zu folgendem Ansatz mit zunächst unbestimmten Koeffizienten $ra_{n,m}$; $sa_{n,m}$ usw. geführt:

$$(138) \quad F_1 = \sum_n \sum_m \mathcal{S} ra_{n,m} R_{n,m}^{(2)}(\alpha) R_{n,m}(\vartheta, \varphi).$$

Diese Gleichung stellt eine Komponente des Hertzschen Vektors der Beugungswelle dar. Es sei gleich hier darauf hingewiesen, daß die Beugungswelle nicht notwendig aus einer einzigen Komponente des Hertzschen Vektors hergeleitet werden kann, auch dann nicht, wenn dies, wie wir voraussetzen, bei der einfallenden Welle der Fall ist. Daher werden wir gewärtig sein müssen, daß wir für den Hertzschen Vektor drei verschiedene Gleichungen der Form (138) erhalten werden, deren Koeffizienten wir dann noch durch ein oben angeheftetes bzw. x , y , z voneinander unterscheiden, je nachdem es sich um die bzw. x -, y -, z -Komponente des Hertzschen Vektors handelt. Ob diese Komplikation wirklich notwendig ist, das werden die Grenzbedingungen lehren.

Der Ansatz (138) für das ursprüngliche Feld entspricht der Annahme, daß der Außenraum materiefrei ist, d. h. die Leitfähigkeit κ ist gleich Null, die Dielektrizität ϵ gleich 1. Im Innern des beugenden Körpers sind Leitfähigkeit und Dielektrizität zwar konstant, doch von Null bzw. 1 verschieden. Man überzeugt sich leicht, daß die Komponenten des Hertzschen Vektors der etwas komplizierteren Schwingungsgleichung

$$(139) \quad \Delta V + \frac{s v^2 - 4 \pi i x v}{c^2} V = 0$$

genügen, in der also der Schwingungsparameter eine komplexe Größe ist. Damit wird auch der Parameter

$$\omega^2 = q^2 \frac{s v^2 - 4 \pi i x v}{c^2}$$

eine komplexe Größe, und damit sind auch die Funktionen $R_{n,m}(\vartheta, \varphi)$, $S_{n,m}(\vartheta, \varphi)$ usw., $R_{n,m}^{(1)}(\alpha)$ usw. komplex. Dies hat an sich keine große Bedeutung, denn man überzeugt sich leicht, daß in den Beweisen des ersten Teiles dieser Arbeit niemals die Voraussetzung, die Größe ω^2 sei reell, eingeführt worden ist. Nur ein Schluß ist nicht mehr stichhaltig: Wenn ω^2 komplex ist, darf man nicht mehr schließen, daß das Integral

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (R_{n,m})^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

von Null verschieden ist; es könnte auch Null sein. Dies hat nun eine merkwürdige Folge. Haben wir eine Funktion z. B. in eine Reihe nach den Funktionen $R_{n,m}(\vartheta, \varphi)$ entwickelt (auf welche Weise das geschah, bleibe dahingestellt):

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_m a_{n,m} R_{n,m}(\vartheta, \varphi),$$

so dürfen wir im Falle eines komplexen ω^2 nicht mehr schließen, daß

$$a_{n,m} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \cdot R_{n,m} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

ist. Zwar gelten die anderen Orthogonalrelationen

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,m} \cdot R_{k,\sigma} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0$$

unverändert, doch ist der fragliche Schluß an die Bedingung

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (R_{n,m})^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \neq 0$$

geknüpft, und diese ist nicht mehr notwendig erfüllt. Wir dürfen also wohl Reihenentwicklungen mit den $R_{n,m}(\vartheta, \varphi)$ usw. bei komplexem ω^2 vornehmen, nur die Art der Koeffizienten-

berechnung läßt sich nicht mit Sicherheit so durchführen wie im reellen Fall. Ob eine allgemeine Methode zur Koeffizientenberechnung angegeben werden kann, ist eine offene Frage, die hier nicht entschieden werden soll.

Der Hertzsche Vektor für das Innere wird durch die Bedingung gekennzeichnet sein, daß er überall im Innern des beugenden Körpers endlich sein muß. Wir haben bei der Betrachtung der Funktionen zweiter Art beweisen können, daß diese für $\alpha = 0$ einen logarithmischen oder einen Pol höherer Ordnung haben. Daher werden Reihenentwicklungen, die Funktionen zweiter Art enthalten, nicht in Betracht kommen. Wir gelangen so zu folgendem Ansatz:

$$(140) \quad F_i = \sum_n \sum_m S r i_{n,m} R_{n,m}^{(1)}(\alpha; \bar{\omega}) \cdot R_{n,m}(\vartheta, \varphi; \bar{\omega}).$$

Dabei haben wir durch die gewählte Schreibweise zum Ausdruck gebracht, daß die Funktionen für das Innere von dem komplexen Parameter $\bar{\omega}$ abhängen. Übrigens müssen wir auch hier darauf aufmerksam machen, daß möglicherweise erst drei verschiedene Ausdrücke vom Typ (140) den Zustand im Innern bestimmen, und daß wir analog wie früher die Koeffizienten dreier verschiedener Vektorkomponenten durch oben angeheftetes bzw. x, y, z voneinander unterscheiden.

Die Komponenten eines Vektors bleiben Translationen des Koordinatensystems gegenüber ungeändert. Bei Drehungen des Koordinatensystems transformieren sie sich wie die Koordinaten selbst. Die Koeffizienten dieser Transformation sind also die Cosinus der neun Winkel, die die drei ursprünglichen Achsen mit den drei neuen Achsen bilden. Zu dieser Art von Transformationen gehört auch der Übergang von einem kartesischen zu einem elliptischen Koordinatensystem. Denn auch die elliptischen Koordinaten sind orthogonal. In einem bestimmten Punkt des Raumes werden die Koordinatenachsen bestimmt durch die drei Normalenrichtungen, die in diesem Punkte für die drei dort sich schneidenden Flächen (Ellipsoid, einschaliges Hyperboloid, zweischaliges Hyperboloid) existieren. Der cos zwischen der x -Achse und der Normalen zum Ellipsoid in diesem Punkte ist $\frac{\partial x}{\partial s_a}$, wo ds_a ein Linienelement ist, das die Richtung der Normalen zum

Ellipsoid hat. Wenn man in dieser Richtung um die Strecke ds_α fortschreitet, ändert sich nur α um den Betrag $d\alpha$. Bezeichnen wir die Wurzeln aus den Koeffizienten des Bogenelementes [Gleichung (9)] mit bzw. A, B, C , so ist

$$\frac{\partial x}{\partial s_\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

und wir erhalten die Transformationsformeln für die Vektor-komponenten:

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_\alpha = \frac{1}{A} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right), \\ \mathfrak{P}_\beta = \frac{1}{B} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \beta} \right), \\ \mathfrak{P}_\gamma = \frac{1}{C} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right). \end{array} \right.$$

Bedeutet \mathfrak{P} den Hertzschen Vektor, so gelangen wir durch ein- bzw. zweimalige Anwendung der Operation rot zu den Feldstärken \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} . Den Ausdruck für die Rotation in krummlinigen Koordinaten entnehmen wir der Literatur¹⁾:

$$(142) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{rot } \mathfrak{P})_\alpha = \frac{1}{BC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (C \mathfrak{P}_\gamma) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (B \mathfrak{P}_\beta) \right\} \\ (\text{rot } \mathfrak{P})_\beta = \frac{1}{AC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} (A \mathfrak{P}_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (C \mathfrak{P}_\gamma) \right\} \\ (\text{rot } \mathfrak{P})_\gamma = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \mathfrak{P}_\beta) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A \mathfrak{P}_\alpha) \right\}. \end{array} \right.$$

Ersetzen wir hier die krummlinigen Komponenten durch die kartesischen [nach Gleichung (141)], so ergibt sich:

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_\alpha = \frac{1}{BC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \right\} \\ \mathfrak{E}_\beta = \frac{1}{AC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right) \right\} \\ \mathfrak{E}_\gamma = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \right\} \end{array} \right.$$

und durch Wiederholung der Operation:

1) Z. B. J. Spielrein, Lehrb. d. Vektorrechnung. S. 177. Stuttgart 1916.

$$(144) \left\{ \begin{aligned} \sigma \mathfrak{E}_\alpha &= \frac{1}{BC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{O}{AB} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{B}{AC} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \right\} \\ \sigma \mathfrak{E}_\beta &= \frac{1}{AC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{A}{BC} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \gamma} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{C}{AB} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} \\ \sigma \mathfrak{E}_\gamma &= \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{B}{AC} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{A}{BC} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \gamma} - \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo das Summenzeichen andeutet, daß noch zwei weitere Ausdrücke hinzukommen, die aus dem hingeschriebenen entstehen, wenn man überall x durch y bzw. z ersetzt.

Die elektromagnetischen Grenzbedingungen fordern Stetigkeit der β - und γ -Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} an der Oberfläche des Ellipsoides. Bei der Durchführung dieses allgemeinen Falles empfiehlt es sich allerdings, wie schon vorher angedeutet, aus den Grenzbedingungen nicht die Komponenten des Hertzischen Vektors, sondern die Komponenten z. B. der elektrischen Feldstärke selbst zu berechnen. Man beachte dazu, daß sich nach den Maxwellschen Gleichungen die magnetische Feldstärke, abgesehen vom Faktor $-\frac{1}{c}$, ebenso ausdrücken läßt, wie durch den Hertzischen Vektor. Das bedeutet, daß, wenn man in der Gleichung (143) \mathfrak{P} durch \mathfrak{E} ersetzt, sich nur die Komponenten der magnetischen Feldstärke mit $-\frac{1}{c}$ multiplizieren. Daher läßt sich die Stetigkeit der tangentialen Komponenten von \mathfrak{H} an der Oberfläche des Ellipsoides so formulieren:

$$(145a) \left\{ \begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{E}_{xi} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{xi} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right\}_{\alpha=\alpha_0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{E}_{xa} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{xa} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right\}_{\alpha=\alpha_0} \\ &\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{xi} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{E}_{xi} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right\}_{\alpha=\alpha_0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{xa} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{E}_{xa} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right\}_{\alpha=\alpha_0}. \end{aligned} \right.$$

Als zweite Bedingung kommt hinzu:

$$(145b) \left\{ \begin{aligned} A \mathfrak{E}_{\beta a} &= \left\{ \sum \mathfrak{E}_{x a} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\}_{a=a_0} = A \mathfrak{E}_{\beta i} = \left\{ \sum \mathfrak{E}_{x i} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\}_{a=a_0}; \\ \left\{ \sum \mathfrak{E}_{x a} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right\}_{a=a_0} &= \left\{ \sum \mathfrak{E}_{x i} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right\}_{a=a_0}. \end{aligned} \right.$$

Schließlich ist dann noch zu beachten, daß im ganzen Raume die Divergenz von \mathfrak{E} verschwinden muß, d. h. die Divergenzbedingung gilt sicher auch an der Oberfläche des beugenden Ellipsoides und zwar für die innere wie für die äußere Komponente. Dies sind zwei weitere Gleichungen. In rechtwinkligen Komponenten, aber mit Differentialoperationen, die sich auf die Koordinaten α, β, γ beziehen, schreiben sich diese Gleichungen so:

$$(145c) \left\{ \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{x a} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{E}_{x a} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{E}_{x a} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right\}_{a=a_0} &= 0 \\ \left\{ \frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{E}_{x i} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{E}_{x i} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{E}_{x i} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right\}_{a=a_0} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sind keineswegs homogen, wie es zunächst den Anschein hat, weil sie ja auch die Komponenten des ursprünglichen elektrischen Feldes enthalten, die uns bekannt sind bzw. die wir aus der einen uns gegebenen Komponente (136) durch Ausführung der Operation *rot* berechnen können. Diese lassen wieder eine Darstellung der Form (136) zu; wir finden nämlich durch die Operation *rot*, wenn wir (136) als die x -Komponente des Hertzschen Vektors ansehen:

$$(146) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0 \\ \mathfrak{E}_{[y]} &= \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} i \frac{v}{c} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i \frac{v}{c} (x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0)} \cdot \sin \vartheta_0 \begin{Bmatrix} \sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} f(\vartheta_0, \varphi_0) \cdot \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt dann für die y - und z -Komponenten je eine der Gleichung (137) analoge Reihendarstellung.

Die sechs Gleichungen 145 a, b, c reichen hin, um die drei Komponenten der inneren und die drei Komponenten der Beugungswelle zu bestimmen; zwar nicht eindeutig, denn ein Teil der Beziehungen ist differentieller Art. Doch wenn wir die Bedingung hinzufügen, daß die zu findenden Ausdrücke in ihrem Geltungsgebiet überall endlich sein sollen, so wird damit die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet. Diese Bedingung sagt nämlich aus, daß die gesuchten Funktionen Reihen sein werden, die im Falle der Beugungswelle die Form (138), im Falle der inneren Welle die Form (140) haben.

Die Berechnung der unbestimmten Koeffizienten in Beugungswelle und dem Zustand für das Innere, läßt sich nun dadurch leicht vollziehen, daß man die sechs Gleichungen (145 a, b, c) nach den Funktionen eines orthogonalen Flächenfunktionensystems entwickelt, z. B. nach den Funktionen $R_{n,m}(\vartheta, \varphi)$; $S_{n,m}(\vartheta, \varphi)$; $T_{n,m}(\vartheta, \varphi)$; $U_{n,m}(\vartheta, \varphi)$ des Außenraumes, weil hier nach Voraussetzung ω^2 reell ist, und daher alle Sätze über die Koeffizientenberechnung gültig sind. Dabei stehen wir dann vor der Aufgabe, die Funktionen des Innern $R_{n,m}(\vartheta, \varphi; \omega)$ usw. mit komplexem ω^2 nach den Funktionen des Außenraumes zu entwickeln. Dies aber haben wir bereits im Paragraphen 13 durchgeführt. Wenn wir dann schließlich die Koeffizienten gleicher Entwicklungsfunktionen einander gleichsetzen, so gelangen wir zu einem System unendlich vieler Gleichungen mit den unendlich vielen unbekannten $ra_{n,m}^x$; $ra_{n,m}^y$; $ra_{n,m}^z$; $ri_{n,m}^x$; $ri_{n,m}^y$; $ri_{n,m}^z$. Dadurch ist die gestellte Aufgabe im Prinzip gelöst. Nur könnte sich noch ein Bedenken erheben: Zu unseren Grenzbedingungen gesellten sich die Bedingungen für das Verschwinden der Divergenz, die wir aber nicht für den ganzen Raum, sondern nur für die Oberfläche des Ellipsoides erfüllten. Es fragt sich nun, ob das so bestimmte Feld wirklich im ganzen Raum der Divergenzbedingung gehorcht, was sicher unbedingt erforderlich ist. Sicher ist offenbar nur, daß das gefundene Feld in unendlich kleiner Entfernung von der Oberfläche der Bedingung genügt und damit mit dem gesuchten Felde identisch ist. Damit

kennen wir aber von jeder der Komponenten von \mathfrak{E} den Wert selbst und den Wert der normalen Ableitung auf der Oberfläche des Ellipsoides. Dann aber sind wir in der Lage, mit Hilfe der Kirchhoff-Huygensschen Formel jede der drei Komponenten analytisch in den Raum hinaus so fortzusetzen, daß die Werte von z. B. \mathfrak{E}_x und $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \alpha}$ stetig in die von uns gefundenen Randwerte übergehen. Bei der analytischen Fortsetzung mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel ist allerdings die Frage, ob nicht auch die unendlich ferne Kugel einen Beitrag liefert, da ja die Komponenten im Unendlichfernen nur wie $1/r$ verschwinden. Dies ist jedenfalls dann zu verneinen, wenn die Wellen divergieren¹⁾, und das tun ja gerade die Beugungswellen, denn die Tatsache vom Nullpunkt weg-eilender Wellen hatten wir durch die Benutzung der Funktionen zweiter Art zum Ausdruck gebracht. Dann aber ist die analytische Fortsetzung eindeutig, d. h. die auf diesem Wege gewonnenen Raumfunktionen stimmen mit den von uns aufgestellten Reihen vollkommen überein, und da dies die einzige Fortsetzung des Komponententripels ist, so muß dies auch die gesuchte Wellenbewegung darstellen, d. h. die Divergenzbedingung muß im ganzen Raume erfüllt sein.

Wir betrachten nun noch kurz den Fall, daß die Leitfähigkeit des beugenden Teilchens unendlich groß ist. Die Grenzbedingungen hierfür lauten: Verschwinden der tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} an der Oberfläche des beugenden Teiles. Aus dem Hertzschen Vektor erhielten wir durch zweimalige Rotationsbildung die mit σ multiplizierte Feldstärke. Andererseits gibt es eine Rechenregel, die besagt:

$$\text{rot rot } \mathfrak{P} = \text{grad div } \mathfrak{P} - \Delta \mathfrak{P}$$

oder da

$$\Delta \mathfrak{P} + \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{P} = 0$$

ist:

$$\text{rot rot } \mathfrak{P} = \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{P} + \text{grad div } \mathfrak{P}.$$

Wenn wir hiervon Gebrauch machen, so finden wir an Stelle von (144):

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 755. 1909 oder Handbuch d. phys. Optik. Band I. S. 559 ff. Leipzig 1926.

$$(147) \left\{ \begin{aligned} \sigma \mathfrak{E}_\alpha &= \frac{1}{A} \left\{ \sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \right\} \\ \sigma \mathfrak{E}_\beta &= \frac{1}{B} \left\{ \sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \right\} \\ \sigma \mathfrak{E}_\gamma &= \frac{1}{C} \left\{ \sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sum \mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Jetzt nehmen wir an, nicht nur das ursprüngliche Feld, sondern auch die Beugungswelle ließe sich aus einer einzigen Komponente des Hertzschen Vektors, z. B. \mathfrak{P}_x ableiten. Dann aber ließen sich die Grenzbedingungen (147) nur befriedigen, wenn

$$(\mathfrak{P}_x)_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

ist. Dies aber ist unmöglich. Denn das elektromagnetische Feld ist bestimmt allein durch den Wert der Feldstärke auf einer geschlossenen Fläche oder durch den Wert der zu dieser Fläche normalen Ableitung. Beide Werte willkürlich vorzugeben ist nicht möglich. Daher haben wir zu schließen, daß das Beugungsfeld sich nicht aus nur einer Komponente des Hertzschen Vektors ableiten läßt, sondern daß dazu im allgemeinen alle drei Komponenten nötig sind. Dann aber finden wir als hinreichende Bedingung für das Verschwinden von \mathfrak{E}_α und \mathfrak{E}_γ :

$$(148) \left\{ \begin{aligned} \left[\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \beta} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \beta} \right]_{\alpha=\alpha_0} &= 0; \\ \left[\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right]_{\alpha=\alpha_0} &= 0; \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\mathfrak{P}_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] \right\}_{\alpha=\alpha_0} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, verfahren wir analog dem allgemeinen Falle. Für den Hertzschen Vektor der Beugungswelle machen wir den Ansatz (138) und zwar für jede Komponente einen. Wieder entwickeln wir dann jede Gleichung nach einem System orthogonaler Funktionen und vergleichen

die Koeffizienten gleicher Entwicklungsfunktionen. So erhalten wir wiederum ein System unendlich vieler Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten.

Hiermit ist das Beugungsproblem vollständig gelöst. An die Gleichungen (148) bzw. (145a, b, c) haben dann die mehr oder minder komplizierten Auswertungen anzuknüpfen.

§ 17. Ein numerisches Beispiel

Wir hatten im § 14 ausführlich den Fall des gestreckten Rotationsellipsoides besprochen und ganz kurz gezeigt, wie auf diesen der Fall des abgeplatteten Rotationsellipsoides zurückgeführt werden kann. In diesem Paragraphen soll als Beispiel für die Auswertung der physikalischen Grenzbedingungen die Beugung an einem speziellen abgeplatteten Rotationsellipsoid durchgeführt werden, weil unter der Schar solcher Ellipsoide ein besonders einfaches ist, nämlich die Kreisscheibe. Die Beugung an einer Kreisscheibe soll hier untersucht werden. Dies ist eine Aufgabe, die bereits Lommel¹⁾ mit den Hilfsmitteln der Fresnel-Kirchhoffschen Beugungstheorie durchführte, eine Aufgabe, die sich dort nur mit einem sehr umfangreichen mathematischen Apparat erledigen ließ.

In der xy -Ebene sei eine Schar konfokaler Ellipsen gezeichnet, die Brennnlinie liege auf der y -Achse, ihr Mittelpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems, der Abstand der beiden Brennpunkte sei $2q$. Durch Rotation dieser Figur um die x -Achse entsteht dann eine Schar abgeplatteter Rotationsellipsoide, unter denen auch die Kreisscheibe ist. Diese entsteht durch die Rotation der Strecke zwischen den beiden Brennpunkten um ihr Mittellot. Ihr Durchmesser ist $2q$. An ihrer Stelle befinde sich eine unendlich dünne, unendlich gut leitende Metallfolie der gleichen Größe; die Beugungserscheinung an dieser Metallfolie ist zu untersuchen. Man sieht sofort, daß ihre Gleichung durch

$$(149) \quad \eta = 0$$

gegeben ist.

Die einfallende Welle soll eben sein und in der Richtung der x -Achse, von positiven zu negativen x fortschreiten. Die Welle sei linear polarisiert, der magnetische Vektor schwinde

1) E. v. Lommel, Abh. d. bayer. Akad. d. W. 15. S. 531. 1886.

in der Richtung der z -Achse. Der Hertzsche Vektor, der diese Welle darstellt, ist dann:

$$(150) \quad \mathfrak{P}_x^e = 0; \quad \mathfrak{P}_y^e = \frac{1}{i \cdot \frac{v}{c}} \cdot e^{i \frac{v}{c} x}; \quad \mathfrak{P}_z^e = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichungen (116a) auf S. 710 und (149) schreiben sich die Grenzbedingungen (148) in folgender Form:

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{P}_y)_0 \cos \varphi + (\mathfrak{P}_z)_0 \sin \varphi = 0, \\ (\mathfrak{P}_y)_0 \sin \varphi - (\mathfrak{P}_z)_0 \cos \varphi = 0, \\ (\mathfrak{P}_y)_0 \cos \vartheta \cos \varphi + (\mathfrak{P}_z)_0 \cos \vartheta \sin \varphi + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial \eta} \right)_0 \sin \vartheta = 0. \end{array} \right.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ließt man sofort ab, daß \mathfrak{P}_y und \mathfrak{P}_z für $\eta = 0$ zu verschwinden haben. Da es aber nach dem Ansatz (150) nur für \mathfrak{P}_y im Außenraum eine Anregungsschwingung gibt, so ist zu schließen, daß \mathfrak{P}_z im ganzen Raume identisch verschwinden muß. Ebenso ergibt die dritte Gleichung das identische Verschwinden von \mathfrak{P}_z , so daß wir in unserem Falle nur eine nicht verschwindende Beugungskomponente \mathfrak{P}_y^b haben. Diese, zusammen mit der Komponente der einfallenden Strahlung, hat der Bedingung $\mathfrak{P}_y = 0$ zu genügen.

Die Beugungserscheinungen treten besonders deutlich auf, wenn die Wellenlänge der einfallenden Strahlung mit den Lineardimensionen des beugenden Körpers vergleichbar wird. Im Rahmen dieser Bedingung haben wir mit der Auswahl der Wellenlänge noch ziemliche Freiheit und werden daher die Wellenlänge so wählen, daß die Eigenfunktionen $p e_n^m(x)$, nach denen wir die Reihenentwicklungen vorzunehmen haben, sich möglichst einfach berechnen lassen. Wir setzen daher fest, die Wellenlänge sei π mal dem Durchmesser der beugenden Kreisscheibe. Dies hat zur Folge, daß $\omega = \frac{v}{c} \cdot q = 1$ wird.

Wir hatten auf S. 710 gezeigt, wie der Fall des gestreckten und des abgeplatteten Rotationsellipsoids formal durch dieselben Gleichungen behandelt werden können, wenn man den Koordinaten auch komplexe Intervalle gestattet. Dann hat man allerdings die Größe q durch $i q$ zu ersetzen. In unserem Falle wird daher der Parameter $\omega = i$. Die mit diesem berechneten Eigenfunktionen sind dann:

$$(152) \begin{cases} p e_0(x) = 0,707 + 0,081 P_2(x) + 0,001 P_4(x) \dots \\ p e_1(x) = 1,281 P_1(x) + 0,051 P_3(x) \dots \\ p e_2(x) = -0,036 + 1,579 P_2(x) + 0,036 P_4(x) + 0,0047 P_6(x) \dots \\ p e_3(x) = -0,027 P_1(x) + 1,582 P_3(x) + 0,028 P_5(x) \dots \end{cases}$$

Die vorstehenden Reihen sind so hingeschrieben, daß sie Ergebnisse liefern, die auf zwei Stellen hinter dem Komma genau sind. Es ist dies die Genauigkeitsgrenze, die wir im folgenden einhalten wollen. Wir erhöhen die zweite Stelle, wenn in der dritten eine Zahl steht, die größer oder gleich fünf ist, im anderen Falle bleibt die zweite Stelle ungeändert.

Wir haben jetzt die Entwicklung der einfallenden Welle nach den Eigenfunktionen vorzunehmen. Dabei kommt uns nun sehr zu statten, daß der Ausdruck für die einfallende Welle, abgesehen von einem konstanten Faktor, vollkommen mit dem Kern Gleichung (117) übereinstimmt, so daß die Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen nichts anderes ist, als die bilineare Entwicklung eines Kernes nach seinen Eigenfunktionen. Bezeichnen wir jetzt die Eigenwerte des Kernes $e^{i\omega xy}$ mit e_n , so ergibt sich:

$$e^{i\omega xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p e_n(y) p e_n(x)}{e_n}.$$

Aus der Integralgleichung (121) rechnet man leicht mit Hilfe der Reihenentwicklung für $e^{i\omega xy}$ durch gliedweise Integration nach, daß wir aus $p e_n(x)$ gerade $\frac{p e_n(y)}{e_n}$ erhalten, wenn wir die Kugelfunktionen $P_{2n}(x)$ mit geradem Index durch $2 \cdot \psi_{2n}(\omega y)$ und die Kugelfunktionen mit ungeradem Index durch $2i \cdot \psi_{2n+1}(\omega y)$ ersetzen. Bezeichnen wir diese Reihen mit $\tilde{p} e_n(y)$, so erhalten wir die Reihenentwicklung:

$$(153) \quad e^{i\omega xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p} e_n(y) p e_n(x).$$

Das Argument der Zylinderfunktionen ψ_n ist, wie man aus den Bemerkungen von S. 710 und unter Beachtung der Gleichung $\omega = i$ sofort erkennt, die Größe $\sin \eta$, die für $\eta = 0$, also an der Oberfläche der beugenden Folie, verschwindet. Da die Zylinderfunktionen ψ_n Potenzreihen sind, deren kleinste Potenz gleich n ist, so verschwinden die Funktionen $p e_{2n+1}(0)$, die

einen ungeraden Index haben, während die Funktionen $p e_{2n}$ mit geradem Index sich für $\eta = 0$ auf $2 A_0^{(2n)}$ reduzieren, wo A_0^{2n} das konstante Glied in der Kugelfunktionsreihe der Funktion $p e_n(x)$ bedeutet, also z. B. $A_0^2 = -0,036$ gemäß Gleichung (152). Es zeigt sich nun, daß bereits $A_0^{(4)}$ kleiner als 10^{-4} ist, ferner, daß $p e_4(x)$ kleiner als drei bleibt, solange x reell ist und nicht größer wird als 1. Diese Bedingung ist also erfüllt für eine Winkelfunktion, denn in unserem Falle ist x durch $\sin \vartheta$ zu ersetzen. In der von uns angestrebten Näherung ist also an der Oberfläche der Metallfolie bereits das Glied $\tilde{p} e_4(y) p e_4(x)$ zu vernachlässigen. Da die ungeraden Glieder von selbst verschwinden, kann man das Feld in der hier gewünschten Näherung durch zwei Glieder darstellen:

$$(154) \quad (\mathfrak{P}_y)_0 = -iq \{1,414 p e_0(\sin \vartheta) - 0,072 p e_2(\sin \vartheta)\}.$$

Natürlich gilt diese Darstellung nur für $\eta = 0$, also an der Oberfläche der Folie.

Um nun der Grenzbedingung $(\mathfrak{P}_y)_0 = 0$ zu genügen, haben wir eine Beugungswelle zu konstruieren, die an der Oberfläche der Folie gerade dem Negativen von (154) gleich wird. Dies läßt sich immer erreichen durch einen zweigliedrigen Beugungssatz, nämlich:

$$(155) \quad \mathfrak{P}_y^b = B_0 q e_0(\sin \eta) p e_0(\sin \vartheta) + B_2 q e_2(\sin \eta) p e_2(\sin \vartheta).$$

Man sieht dann leicht, daß der Bedingung $(\mathfrak{P}_y)_0 = 0$ genügt wird durch:

$$(156) \quad B_0 = +iq \cdot \frac{1,414}{q e_0(0)}; \quad B_2 = -iq \cdot \frac{0,072}{q e_2(0)}.$$

Das einzige, was noch Schwierigkeiten bereiten könnte, ist die Berechnung des Wertes $q e_{2n}(0)$. Wir haben zwar Reihen für $q e_{2n}(y)$. Die eine entsteht aus der Reihe $\tilde{p} e_{2n}(y)$, wenn wir $\psi_{2\sigma}$ durch $\Psi_{2\sigma}$ ersetzen und die Funktion mit dem Eigenwert e_{2n} multiplizieren. Doch hört diese Reihe bereits zu konvergieren auf, wenn $y = 1$ wird, ist also sicher nicht mehr für $\eta = 0$ zu gebrauchen. Aber ebenso, wie wir für die Funktionen erster Art $p e_n(x)$ verschiedene Entwicklungen nach den Zylinderfunktionen erhielten, einmal nach $\psi_k(\omega x)$, dann aber auch nach $\psi_k(\omega i \sqrt{1-x^2})$, so ergibt sich eine analoge Reihe auch für die $q e_{2n}(y)$, nämlich:

$$(157) \quad q e_{2n}(y) = j_{2n} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{2\sigma!}{2^{2\sigma-1}(\sigma!)^2} A_{2\sigma}^{(2n)} \psi_{2\sigma}(i\omega\sqrt{1-y^2}),$$

wo $A_{2\sigma}^{(2n)}$ die Koeffizienten der Funktion $p e_{2n}(x)$ in der Kugelfunktionsreihe (153) bedeuten. Unter j_{2n} seien die Eigenwerte des Kernes $J_0(i\omega\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ verstanden. Die Reihe (157) konvergiert ebenfalls, solange das Argument der Zylinderfunktionen größer als 1 ist. In unserem Falle ist das Argument $\cos\eta$. Daher konvergieren die Reihen (157) bis an die Folie heran, aber nicht auf der Folie. Die Reihen (157) werden wir also immer anwenden müssen, wenn wir das Feld in der Nähe des beugenden Schirmes berechnen wollen, über die Werte $q e_{2n}(0)$ erhalten wir aus ihnen jedoch keinen Aufschluß. Daher haben wir auf die Integraldarstellung (133) zurückzugehen, in der allerdings noch die unbestimmt gelassene Konstante zu berechnen ist. Es zeigt sich, daß diese Darstellung mit der Reihe (157) in ihrem Konvergenzbereich identisch wird, wenn wir die Konstante gleich $2(e_{2n})^2$ wählen, wo e_{2n} wie vorher definiert, ein Eigenwert des Kernes $e^{i\omega xy}$ ist. Wir erhalten so:

$$(158) \quad q e_{2n}(y) = 2(e_{2n})^2 \int_{-1}^{+1} \Psi_0[\omega(y-z)] p e_{2n}(z) dz.$$

Hier beachte man nun, daß $\Psi_0(x) = \frac{e^{-ix}}{x}$ ist. So ergibt sich schließlich:

$$(159) \quad q e_{2n}(0) = -2 \frac{(e_{2n})^2}{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{i\omega z}}{z} p e_{2n}(z) dz.$$

Hier setze man nun für die e -Funktion ihre Potenzreihe ein, beachte, daß sowohl

$$\int_{-1}^{+1} \frac{p e_{2n}(z) dz}{z} \text{ als auch } \int_{-1}^{+1} p e_{2n}(z) z^{2k+1} dz$$

verschwinden, weil die $p e_{2n}(z)$ mit geradem Index gerade Funktionen sind. Die e -Reihe breche man dann an einer Stelle ab, an der der Fehler kleiner wird als $5 \cdot 10^{-3}$. Es zeigt sich, daß bereits das folgende Integral eine hinreichende Näherung ist:

$$(159a) \quad q e_{2n}(0) = -2i(e_{2n})^2 \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) p e_{2n}(z) dz.$$

Dann ersetze man nur noch $p e_{2n}(z)$ durch seine Reihe (153) und erhält dann eine Reihe von Integralen der Form:

$$\int_{-1}^{+1} z^{2n} P_{2n}(z) dz.$$

Diese sind aber in der Gleichung (125) bereits ausgewertet. Auf diese Weise erhält man dann aus (156):

$$(160) \quad B_0 = q \cdot 21,753; \quad B_2 = -q \cdot 0,001.$$

Der Hertzsche Vektor für das gesamte elektromagnetische Feld ist dann:

$$(161) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_y &= -q \{ i e^{i \sin \eta \sin \vartheta} - 21,753 q e_0(\sin \eta) p e_0(\sin \vartheta) \\ &\quad + 0,001 q e_2(\sin \eta) p e_2(\sin \vartheta) \}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der Gleichung (143) läßt sich dann die magnetische Feldstärke berechnen, und das Quadrat des absoluten Betrages dieser ergibt die Intensität.

Führen wir die Rechnung durch, so zeigt sich eine bemerkenswerte Schwierigkeit. Der Ausdruck für die Feldstärken nimmt auf der x -Achse und direkt an der beugenden Folie den Wert ∞ an. Dies liegt daran, daß die Reihen nicht überall gliedweise differenziert werden dürfen, weil auf gewissen Linien die Entwicklungsfunktion alle unendlich groß werden. Man könnte z. B. daran denken, mit Hilfe der Greenschen Formel den Ausdruck für die Feldstärken, der außerhalb der in Frage stehenden Geraden überall gültig ist, in diese hinein fortzusetzen. Doch ist es noch einfacher, nicht die magnetische, sondern die elektrische Feldstärke¹⁾ zu berechnen. Diese ergibt sich aus \mathfrak{P} durch zweimalige Anwendung der Operation „rot“.

$$\text{rot rot } \mathfrak{P} = \text{grad div } \mathfrak{P} - \Delta \mathfrak{P}$$

ist und \mathfrak{P} der Schwingungsgleichung genügt, so ergibt sich:

$$\mathfrak{E} = \frac{v^2}{c^2} \mathfrak{P} + \text{grad div } \mathfrak{P}.$$

Der Vektor \mathfrak{P} war so bestimmt, daß die Tangentialkompo-

1) Diese ist natürlich nicht gleich der magnetischen Feldstärke, da in der Nähe der Metallfolie stehende Wellen zu erwarten sind.

nenten von \mathfrak{E} an der Oberfläche der beugenden Scheibe Null werden. \mathfrak{P} selber ist aber ebenfalls dort Null. Daraus folgt, daß auch $\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial y}$ dort verschwinden muß. Nun ist aber der Hertzsche Vektor für die einfallende ebene Welle divergenzfrei, daher entsteht $\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial y}$ allein durch Differentiation des Teiles von \mathfrak{P} , der vom Nullpunkt wegeilende Wellen darstellt, ist also wiederum eine solche und gestattet daher die Darstellung

$$\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial y} = \sum_n \sum_m B_n^m q e_n^m (\mathfrak{S} \sin \eta) p e_n^m (\sin \vartheta) \cos m(\varphi - \varphi_0).$$

Da nun aber die Funktionen $q e_n^m(0)$, wie ein Blick auf die Gleichung (133) lehrt, niemals Null sind, müssen die Koeffizienten der Reihe verschwinden. Die Komponente $\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial y}$ ist also im ganzen Raume identisch Null. Ebenso zeigt man auch, daß $\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial x}$ identisch verschwinden muß, jedoch ist $\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{P}}{\partial x}$ von Null verschieden, weil der Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ genügt werden muß. Diese Komponente hätten wir durch Differentiation zu berechnen und würden finden, daß der analytische Ausdruck auf der x -Achse zu gelten aufhört, weil wieder dort die Entwicklungsfunktionen unendlich groß werden. Doch ist der Wert von \mathfrak{E}_x auf der x -Achse leicht anzugeben; denn aus Symmetriegründen muß für $y=z=0$ der Energiestrom die Richtung der x -Achse haben, der elektrische und magnetische Vektor in einer Ebene senkrecht zur x -Achse liegen, woraus sofort folgt:

$$(\mathfrak{E}_x)_{y=z=0} = (\mathfrak{H}_x)_{y=z=0} = 0.$$

Auf der x -Achse berechnet sich daher die Intensität allein aus der y -Komponente des elektrischen Vektors; diese stimmt mit \mathfrak{P}_y durchaus überein und wird durch Gleichung (161) dargestellt.

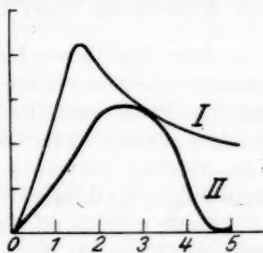


Fig. 1

Für $q = 1$ haben wir die Intensitäten auf der x -Achse unmittelbar vor und hinter dem beugenden Schirm berechnet und in einer graphischen Zeichnung veranschaulicht. Die Kurve I stellt die Intensität vor die Kurve II hinter dem

Schirm dar. Die Abszisse ist die Entfernung des Punktes von der beugenden Scheibe, die Ordinate stellt die Intensität in Prozenten der einfallenden Intensität dar; die Wellenlänge ist 2π . Die beiden Kurven berühren sich bei $x = \pi$ und dies ist nur natürlich, da der Ausdruck für \mathfrak{P}_y vor und hinter dem Schirm auf der x -Achse sich nur durch verschiedenes Vorzeichen im Exponenten der e -Funktion unterscheidet. Er liefert also die gleichen Werte dort, wo der imaginäre Teil der e -Funktion verschwindet, und dies tritt bei jedem ganzen Vielfachen von π ein.

Zusammenfassung des physikalischen Teiles

Im § 15 wird gezeigt, wie sich aus der Gestalt des beugenden Ellipsoides das Koordinatensystem herleiten läßt und welcher Gleichung das beugende Ellipsoid in diesem Koordinatensystem genügt. Der Hertzsche Vektor als Integral der Maxwellschen Gleichungen wird eingeführt und das allgemeine Integral der Wellengleichung angegeben, auf elliptische Koordinaten umgerechnet, und die ihm äquivalente Reihenentwicklung gegeben [Gleichung (136—137)]. Der nächste Paragraph zeigt, wie die elektromagnetischen Grenzbedingungen benutzt werden können, um ein spezielles elektromagnetisches Feld wirklich zu berechnen. Der § 17 enthält die Illustration der Methode an einem Beispiel.

Zum Schluß möchte ich nicht verfehlen, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. von Laue, meinen ergebenen Dank auszusprechen für das ständige Interesse, das er dem Fortschreiten der Arbeit entgegen gebracht hat, sowie für manchen wertvollen Rat und Aufmunterung bei den oft schwierigen mathematischen Untersuchungen.

Dank schulde ich ferner dem Kaiser Wilhelm-Institut für Physik, das mich durch Gewährung von Geldmitteln in die Lage versetzte, numerische Rechnungen von anderer Seite ausführen zu lassen.

Fräulein L. Wohlleben unterstützte mich in freundlicher Weise bei der Auswertung der Integralgleichungen und bei anderen orientierenden Rechnungen.

(Eingegangen 16. Mai 1927)

2. Über die Vergrößerung der Brownschen Bewegung durch das Licht; von W. Pospíšil

I. Experimenteller Teil

1. Der Zweck der vorliegenden Arbeit war durch Messungen der Beweglichkeit mikroskopischer Teilchen bei verschieden intensiver Beleuchtung quantitativ zu konstatieren, ob und in welchem Maße das benutzte Licht diese Bewegung beeinflussen kann.

2. Übersicht der älteren, ähnliches Ziel verfolgenden Arbeiten.¹⁾ Regnauld (1858) beobachtete auf kugelförmigen Partikeln von $0,25\mu$ Durchmesser, daß ihre Bewegung durch Verschwächung des einfallenden Lichtes verkleinert werde, und er findet deswegen die Ursache der Brownschen Bewegung in den Flüssigkeitsströmungen, welche durch die Wärme des von den Partikeln absorbierten Lichtes hervorgerufen werden. Zu derselben Anschauung ist S. Exner (1867) geführt worden. Exner hatte die Bewegung verschiedener Substanzen mittels eines Gitters im Mikroskopokular gemessen und fand die Bewegung bedeutend größer bei einer intensiveren Beleuchtung. Beide Arbeiten leiden an dem Umstand, daß die mit der Temperatur veränderliche Viskosität der Suspension nicht berücksichtigt wird.

Nachdem schon von Carbonelle (1874) die kinetische Ursache nach der Gastheorie ausgesprochen wurde, untersucht Gouy (1888) qualitativ verschiedene äußere und innere Einflüsse auf die Brownsche Bewegung und berichtet, daß er bei einer Lichtintensitätsänderung im Verhältnis 1:1000 keine Änderung in der Größe der Bewegung wahrnehmen konnte. Gouy sagt: „La lumière ne joue donc aucun rôle sensible

1) Bezüglich der Literaturangaben sei auf die Monographie de Haas-Lorentz, „Die Brownsche Bewegung“, Sammlung Wissenschaft, verwiesen.

dans le mouvement brownien“ (C. R. 109. p. 104. 1889). Gouy hatte aber die Bewegung nicht gemessen und suchte vielmehr die Nichtexistenz und auffälligere Änderungen der Bewegung.

Auch Meade Bache (1894) hatte keine Einwirkung des Lichtes auf die Brownsche Bewegung gefunden.

Trotzdem referiert Koláček (1889) über die Gouysche Arbeit folgendermaßen: „Referent meint, hierin (d. h. in der Brownschen Bewegung) nichtsdestoweniger eine Art radio-metrischen Wirkung zu erblicken, zu deren Entfernung bei der äußersten Feinheit und Beweglichkeit der Teilchen Beleuchtungen gehören würden, die eine Beobachtung der Erscheinung ausschließen“. (Beiblätter 13. S. 877. 1889).

Quincke (1898) sieht die Ursache der Bewegung in der Beleuchtung, indem die das Partikel einhüllende Schicht ungleichmäßig erwärmt wird.

Aus der Zeit nach den entscheidenden theoretischen Arbeiten von Einstein (1905) und Smoluchowski (1906) sei erwähnt die auch nur qualitative Untersuchung Svedbergs („Existenz der Moleküle“ S. 98) über den Einfluß der α -, β - und kurzwelligen Strahlen auf die Bewegung der Kolloidpartikelchen, mit negativem Erfolg, und daß V. Henri (1908) bei einer sehr intensiven Beleuchtung, welche zu den kinematographischen Aufnahmen nötig wurde, das mittlere Quadrat der Verschiebungen der Partikel viermal größer gefunden hatte, als nach der Einsteinschen Formel zu erwarten war.

Nach der glänzenden Bestätigung der Einsteinschen Formel für das mittlere Quadrat der Verschiebungen $\overline{\Delta_x^2}$ der Partikeln in einer fest gewählten Richtung x

$$(I) \quad \overline{\Delta_x^2} = \frac{RTt}{N 3 \pi \zeta r},$$

wo R die Gaskonstante, T absolute Temperatur, t die Zeit, N die Loschmidtsche Zahl, ζ die Viskosität der Flüssigkeit, r den Radius der kugelförmigen Partikeln bedeutet, durch die Arbeiten von Perrin und Svedberg ist zu erwarten, daß eine intensive Beleuchtung die Brownsche Bewegung nur in dem Maße vergrößern kann, soweit sie die Temperatur der suspendierenden Flüssigkeit erhöht und ihre innere Reibung herabsetzt.

3. *Die Arbeitsmethode des Autors.* Als Maß der Beweglichkeit der Brownschen Teilchen diene nach der Einsteinschen Formel (1) das mittlere Quadrat der Verschiebungen. Die Positionen der Teilchen wurde in Zeitintervallen von 10 Sek. mittels des Abbeschen Zeichenapparates auf das Millimeterpapier aufgezeichnet, dann wurden die Verschiebungen Δ_x und Δ_y in zwei zueinander senkrechten Richtungen abgelesen, quadriert und das Mittel von ihnen $\overline{\Delta_{xy}^2}$ berechnet. Die beiden Richtungen x, y sind nur wegen der besseren Kontrolle und Verlässlichkeit berücksichtigt worden. Dies geschah für eine sehr schwache Beleuchtung, welche noch eine verlässliche Beobachtung zuließ und für eine intensive Beleuchtung. Die dazu gehörigen Verschiebungen bezeichnen wir $\overline{\Delta_0^2}$ und $\overline{\Delta_i^2}$.

Die gemessenen Verschiebungen wurden dann umgerechnet auf dieselbe Temperatur (293° absol.) und auf die zu dieser gehörige Viskosität nach der Formel

$$\overline{\Delta_0^2}_{\text{red}} = \overline{\Delta_0^2} \frac{293 \zeta_0}{T_0 \zeta_{293}}, \quad \text{bzw.} \quad \overline{\Delta_i^2}_{\text{red}} = \overline{\Delta_i^2} \frac{293 \zeta_i}{T_i \zeta_{293}},$$

(wo T_0, ζ_0, T_i und ζ_i die gemessenen Temperaturen und Viskositäten bedeuten), und erst dann sind diese reduzierten Mittel verglichen worden. Die Gefahr einer zu großen Extrapolation droht hier nicht, weil es sich nur um wenige Zehntel von Grad handelt.

Etwaigen Überschuß von $\overline{\Delta_i^2}_{\text{red}}$ über $\overline{\Delta_0^2}_{\text{red}}$, der eben nach dem oben gesagten nicht zu erwarten ist, nennen wir die *Vergrößerung der Brownschen Bewegung durch das Licht* und es ist dann eine Erklärung für ihn zu suchen.

4. *Die Apparatur.* Nach längeren mißerfolgten Messungen an Toluolemulsionen im Wasser verfertigte ich eine für meinen Zweck sich gut bewährende Beobachtungsküvette mit den Dimensionen $1 \times 1 \times 0,1$ mm, welche eine Menge von etwas über 0,1 mg Emulsion und ein Thermoelement aufnehmen konnte.¹⁾ (Fig. 1.) Die sonstige Apparatur zeigt die Fig. 2.

1) Die Küvette verfertigt man auf folgende Weise. Auf das Unterlageglas wird mit dem Balsam ein glattes, dünnes Deckgläschen aufgeklebt und nach dem Eintrocknen wird dieses mit dem Diamanten zweimal länglich in einer Entfernung von 1 mm eingeritzt, mittels Xylol freigemacht und in drei Teile gebrochen. Der mittlere enge Streifen wird

Als Lichtquelle diente bei den endgültigen Messungen eine Nernstsche Glühlampe, weil sich die Bogenlampe wegen ihrer unvollkommenen Stabilität zu diesem Zwecke nicht gut eignete.

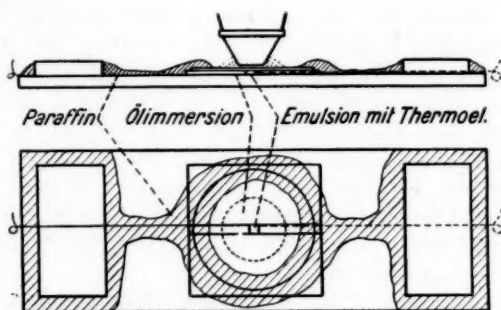


Fig. 1

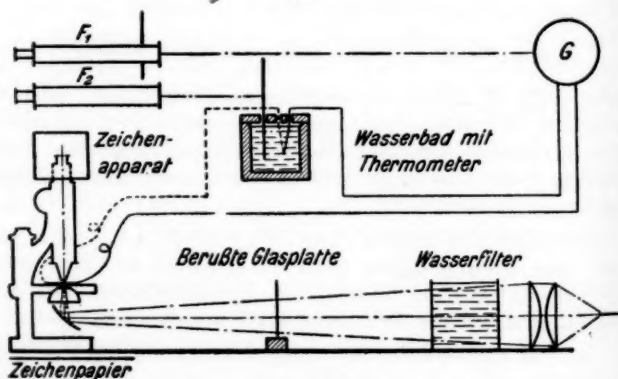


Fig. 2

Es wurde mit einer Ölimmersion und 3560maligen Vergrößerung gearbeitet, welche einer Bildentfernung von 47 cm entsprach. Die Größe der suspendierten Teilchen von *Mastix*,

in der Hälfte gebrochen und alle vier Stücke werden wieder auf ein Glas, wie die Fig. 1 zeigt, so aufgeklebt, daß sich in den einen Ritz noch die dünnen Thermoelmenteindrähte einbetten lassen. Das neue Deckgläschen über der Emulsion wird mit Paraffin abgedichtet.

Gummigutt und Ruß war nach der Art der endgültigen Messungen nicht unbedingt notwendig zu kennen; sie war geschätzt mittels des Zeichenapparates und mehrerer auf ein Papier gezeichneten Kreise von 1, 2, 3, ... mm Radius, welche einer wirklichen Größe von 0,28, 0,56, 0,84, ... μ entsprachen.

Die Temperaturänderungen in der Emulsion konnten mit dem Thermoelemente Konstantan-Nickelin bis auf Tausendstel von Grad bestimmt werden, aber es genügte vollkommen, ihren Wert nur auf Zehntel von Grad zu messen. Die Viskosität der benutzten Flüssigkeit und ihre Veränderlichkeit mit der Temperatur wurde mit einem Kapillarviskosimeter durchgemessen.

5. *Die Hauptmessungen und ihre Resultate.* Die ersten einigen Tausende von Punktierungen, welche bei verschiedenen Lichtquellen und Intensitäten an Toluol-, Mastix-, Gummigutt-, Tusche-, Zimmerstaub und Rußsuspensionen im Wasser vorgenommen wurden, brachten nicht genug sichere und einwandfreie Resultate, sie waren nur eine notwendige Schulung in der Handhabung der endlichen Messungen. Aus diesen sei nur angeführt:

a) *die Messung der Bewegung der Gummigutteilchen im Lichte, welches sie nicht absorbieren.* Es wurde an einer wäßrigen Gummiguttemulsion mit Teilchenradius von 0,22 bis 0,35 μ eine Reihe von 500 einzelnen Punktierungen durchgeführt. Eine Hälfte von ihnen bei einer intensiven Beleuchtung mittels der Nernstschen Glühlampe und die zweite Hälfte bei demselben Lichte, welches noch durch eine 8 cm dicke Schicht von starker alkoholischer Gummiguttlösung filtriert wurde, welche alles Licht, die rechte Seite des optischen Spektrums, das von den Teilchen absorbiert werden konnte, entfernte. Die Temperaturunterschiede in der Emulsion betrugen 0,3—1° C.

Nach der Reduktion folgt für das Verhältnis der Verschiebungen

$$\overline{A^2}_{\text{filtr. Licht}} : \overline{A^2}_{\text{weißes Licht}} = 100 : 107,6$$

b) *Messungen an denselben Kohlenteilchen.* Die Orientierungsmessungen an Kohlenteilchen haben eine größere

Geschwindigkeitssteigerung der Bewegung mit der Lichtintensitätszunahme gezeigt.¹⁾

Weil es sich um nichtkugelförmige Teilchen handelt, für welche man die veränderliche Widerstandsformel (analoge Formel zum Stokesschen Fallgesetz) nicht kennen kann und damit auch der Fehler aus der Wahl von nicht gleichgroßen Teilchen bei verschiedener Beleuchtung ausgeschieden wäre, wurden die Messungen auf folgende Art durchgeführt. Das Sehfeld wird intensiv beleuchtet, dann wird in den Strahlengang des Lichtes eine stark berußte Glasplatte gestellt (Fig. 2), welche nur soviel Licht durchläßt, damit noch die Teilchen beobachtet werden können. In diesem Lichte machte ich an einem Teilchen 10—60 Punktierungen, und ohne das Teilchen zu verlieren, entfernte ich die Rußplatte, und an denselben Teilchen zeichnete ich eine beiläufig gleichgroße Anzahl von seinen Positionen ein. Aus beiden diesen Reihen werden nur soviel erste Punktierungen in Rechnung gezogen, wieviel die kürzere von ihnen enthält.

Bei dieser Methode fallen viele Punktierungen leer aus, hauptsächlich wegen des vorzeitigen Verlustes des Teilchens. Weil das Wasser infolge seiner kleinen Viskosität eine zu lebhafte Bewegung erlaubt, wurde als Suspensionsflüssigkeit eine Mischung von Wasser und Glyzerin im Volumenverhältnis 2:1 benutzt, welche bei 20°C das spezifische Gewicht 1,088 hat. Ihre Viskosität beträgt bei den Temperaturen 18, 19, 20, 21°C die absoluten Werte: 0,0286, 0,0276, 0,0266, 0,0256.

Auf diese Art wurden an 13 Rußpartikeln zwei Reihen von Punktierungen, jede mit 250 zählbaren Punktierungen, gewonnen. Die Temperaturunterschiede betrugen 0,7°C. Nach der Reduktion bekommt man

$$\overline{A_0^2} : \overline{A_i^2} = 100:147.$$

c) *Vergleichende Messungen.* Mit der sub b) beschriebenen Methode wurden über Zwölfhundert zählbaren Punktierungen an Mastix-, Gummigutt- und Rußteilchen durch-

1) Die Kohlenteilchensuspension wurde nach verschiedenen mißerfolgten Versuchen auf folgende einfache Weise vorbereitet. Der käufliche Ruß wird mit Wasser geschüttelt und nach seinem Herabsetzen zeigt das Mikroskop in dem obenstehenden klaren Wasser suspendierte Rußteilchen verschiedener Form und Größe.

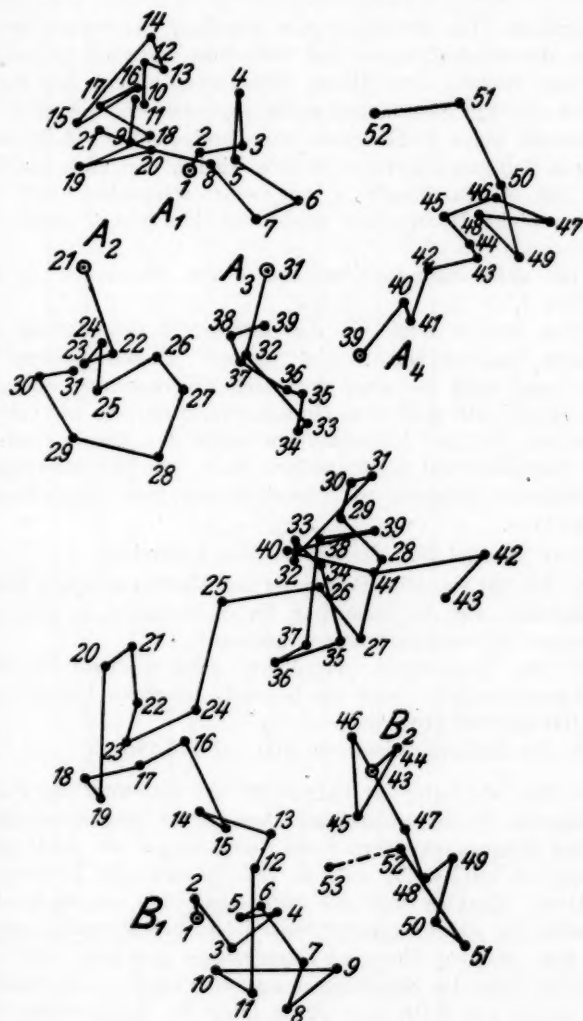


Fig. 3

geführt. Es wurden immer gleichzeitig in derselben Emulsion Mastix- und Rußteilchen und Gummigutt- und Rußteilchen

suspendiert. Die Bewegung der einzelnen Substanzen wurde dann abwechselnd immer auf denselben Partikeln gemessen.

Ein Beispiel aus diesen Messungen bringt die Fig. 3, welche die 128. Protokollartabelle reproduziert. Sie gibt die Positionen eines Rußteilchens von äquivalentem Halbmesser $0,4 \mu$ in Zeitintervallen von 10 Sek. wieder, und zwar beziehen sich die 4 Kurventeile A zur sehr schwachen und die 2 Kurventeile B zu einer intensiven ($2,2 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$) Beleuchtung.¹⁾

Die zahlenmäßigen Angaben dieser Messungen enthält die Tab. 1.

Der Mastix zeigt bei der intensiven Beleuchtung das mittlere Quadrat um 2 Proz. kleiner. Diesen Unterschied kann man wohl als eine statistische Schwankung ansehen. Das Gummigutt zeigt eine ähnliche Vergrößerung wie sub a). Wenn wir bei den Kohlenteilchen auch das Resultat sub b) (mit Rücksicht auf seine größere Reihe von Punktierungen) in Rechnung nehmen, so bekommen wir eine Vergrößerung um 45 Proz.

Das Resultat der Messung ist also folgendes:

1. Die Brownsche Bewegung der Mastixkügelchen bleibt rücksichtslos auf die Intensität der Beleuchtung in den statistischen Schwankungsgrenzen konstant.

2. Das Gummigutt vergrößerte sein mittleres Quadrat der Verschiebungen durch die benutzte intensive Beleuchtung von 100 auf 107 Proz. und

3. Die Kohlenteilchen von 100 auf 145 Proz.

6. *Die Messung der Intensität der Beleuchtung* wurde auf folgende Weise durchgeführt. Anstatt des Präparates wurde auf das Mikroskopkondensor ein Diaphragma von $2,24 \text{ qmm}$ Öffnung so eingestellt, daß es den intensivsten Lichtstrom durchließ. Darüber war ein Silberscheibchen untergebracht. Dasselbe war auf der unteren Seite leicht beruht und es wurde von den dünnen Thermoelementdrähten getragen, die auf die obere Seite des Scheibchens angelötet waren. Das Scheibchen wurde auf 2 Min. der Einwirkung des Lichtstromes be-

1) Wie man sieht, wurde die Punktierung einigemal (auf 2—3 Sek.) unterbrochen und das Zeichenpapier verschoben, damit nicht zu viele Aufzeichnungen auf eine kleine Fläche kämen.

Tabelle I

Prot.- tabelle	Substanz	r 10^{-4}cm	Zahl der Teilchen	Beleuchtung		Zahl der zähl- baren Δ	Tempe- ratur $^{\circ}\text{C}$	Visko- sität ζ	Verschiebung $\overline{\Delta^2_{x,y}}$			Verhältnis der Verschiebungen	
				filtr. mit Rußpl.	Nernst Lampe				im Ganzen	Einzeln	cm^2/sec 10^{-9}	vor Reduktion	nach Reduktion
125 bis 139	Mastix . . .	0,45	7	/	—	225	18,3	0,0283	35800	159,1	3,14	100 : 101	100 : 98
			7	—	/	225	19,1	0,0275	36010	160,5	3,17		
	Gummigutt.	0,37	7	/	—	240	19,1	0,0275	48620	202,6	4,00	100 : 110	100 : 106
			7	—	/	240	20,1	0,0265	53610	223,4	4,41		
	Ruß	0,4	5	/	—	181	18,8	0,0278	30270	167,2	3,30	100 : 146,8	100 : 141,7
			5	—	/	181	19,6	0,0269	44420	245,5	4,84		

lassen und aus der graphischen Darstellung des Galvanometerausschlages (Fig. 4, Kurve A) wurden dann die Wärmeverluste abgemessen. So bekommt man einen linearen Zuwachs der Temperatur des Scheibchens während der Beleuchtung (Fig. 4, Kurve B).¹⁾

Für die mittlere Intensität I des Lichtstromes wurde aus sieben Messungen

$$I = 2,15 \pm 0,15 \text{ cal/qcm min} = 2,2 \text{ cal/qcm min}$$

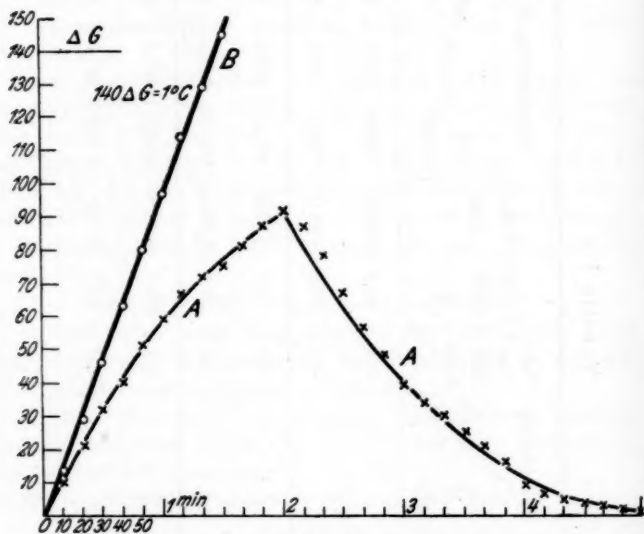


Fig. 4

gefunden. Von dieser strahlenden Energie kann man voraussetzen, daß sie ausschließlich den optischen Wellenlängen angehört, denn die anderen Wellenlängen wurden von dem Wasserfilter und zahlreichen Glasschichten der Apparatur beseitigt.²⁾

Die bei den Punktierungen benutzte sehr schwache Beleuchtung konnte mit dieser Methode nicht gemessen werden.

1) Bezieht sich zu einem Scheibchen von 1,011 g Gewicht.

2) Mit derselben Methode wurde konstatiert, daß nur das Wasserfilter (10 cm Wasserschicht) aus dem gesamten Energiestrom 79 Proz. absorbiert.

Weil der absoluten Größe dieser Beleuchtung keine wesentliche Bedeutung zukommt, wurde sie bloß abgeschätzt. Sie betrug bedeutend weniger als 0,001 der intensiven Beleuchtung.

7. Die Avogadro-Loschmidtsche Zahl N habe ich wegen der Kontrolle der absoluten Größe der Verschiebungen aus 1678 Punktierungen, welche auf den Mastix und Gummigutt-emulsionen bei sehr schwacher Beleuchtung gemacht wurden, berechnet und bekam für sie den Wert $N = 6,22 \cdot 10^{23}$.

II. Besprechung der Resultate

8. Über die Verlässlichkeit der Resultate. Die Temperatur und Viskosität wurden so gemessen und berücksichtigt, daß in dieser Hinsicht kein Zweifel entstehen kann. Auch die Größe der Teilchen und die verschiedene Form der Rußteilchen bleiben auf die Resultate ohne Einfluß, weil sich die auf sie bezogenen Größen bei der Bestimmung der Verhältnisse eliminieren.

Die Hauptaufmerksamkeit müssen wir den möglichen Strömungen in der Flüssigkeit widmen, sie sind die wundeste Stelle der Arbeiten dieser Art. Daß die vorliegende Arbeit auch in dieser Hinsicht einwandfrei ist, geht aus folgendem hervor:

a) Die Beobachtungsküvette wurde deshalb so klein gemacht, damit die ganze Flüssigkeit gleichmäßig erwärmt wäre und keine Ursache zu Strömungen entstehen möchte.

b) Das gleichzeitige Suspendieren von Mastix und Kohlentheilchen hatte eben den Zweck, zu beweisen, daß in der intensiv beleuchteten Flüssigkeit wirklich keine Strömung vorhanden war. Denn sonst müßten alle Substanzen dieselbe Vergrößerung zeigen, wenn sie durch Strömungen verursacht sein sollte. Das Resultat bestätigt die obere Behauptung.

c) Daß die Bewegung der Kohlentheilchen auch während der intensiven Beleuchtung den Charakter einer reinen Brownschen Bewegung trug, kann man folgendermaßen nachprüfen. Nach der Einsteinschen Formel sollen die $\overline{\Delta^2}$, welche den Zeiten $t, 2t, 3t \dots$ entsprechen, im Verhältnis 1:2:3... stehen. Aus den Diagrammen kann man jetzt auch die Verschiebungen zwischen der 1. und 3., der 2. und 4. usw., und zwischen der 1. und 4., der 2. und 5. Position usw. ablesen und die $\overline{\Delta^2}$ berechnen.

So wurde gefunden, daß die $\overline{A^2}$, welche den Zeiten 10, 20, 30 Sek. entsprechen, im Verhältnis stehen:

1:2,02:2,81.... für die schwache Beleuchtung, und
1:1,95:2,86.... für die intensive Beleuchtung.

Dieses Resultat kann man mit Rücksicht auf die statistische Methode und die fallende Zahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungen (166 für 20 Sek. und 151 für 30 Sek.) als gut bezeichnen. Die Abweichungen betragen in der Reihenfolge 1, 6, 2,5, 5 Proz. Wenn in der Flüssigkeit nur eine Spur von Strömungen vorhanden wäre, so wäre auch die Bahn der Teilchen teilweise gestreckt und die Quadrate müßten dann enorm steigen.

Für die Vergrößerung der Bewegung der Kohlenteilchen für die Zeiten von 20 und 30 Sek. wurde nach der vorigen Methode gefunden, daß sie

für die Zeit von 20 Sek. 37 Proz.,
„ „ „ „ 30 „ 45 „ beträgt.

Aus vorigen Ausführungen folgt, daß die vorliegenden Resultate verläßlich sind und daß auch die vergrößerte Bewegung der Kohlenteilchen rein *brownisch* war.

9. Die Folgerungen aus den Messungen sind:

1. Die Brownsche Bewegung existiert auch ohne Beleuchtung, in der optischen Dunkelheit. Weil die Bewegung der Mastixteilchen unverändert bleibt, wenn die Beleuchtung von einer sehr niederen zu einer mehr als tausendmal höheren Intensität gesteigert wird, so wäre jeder Zweifel, daß die Bewegung plötzlich aufhört, wenn die letzte optische Strahlung verschwindet, unlogisch.

2. Das absorbierte Licht vergrößert die Brownsche Bewegung. Damit soll die allgemein akzeptierte Gouysche Anschauung (Abs. 2) korrigiert werden. Der Irrtum von Gouy ist leicht erklärlich. Unter den beiden Kurventeilen A und B (Fig. 3) kann man wohl keinen auffallenden Unterschied wahrnehmen, und trotzdem ist das mittlere Quadrat der Verschiebungen in B um 40 Proz. größer als in A. Und wenn wir bedenken, daß die eingezeichneten geraden Kurvenstrecken in Wirklichkeit wieder verwickelte Brownsche Linien sind, so sieht

man, daß es unmöglich ist, die behandelte Vergrößerung un-
zahlenmäßig zu konstatieren.

10. Die Vergrößerung der Brownschen Bewegung durch das Licht läßt sich im Rahmen der kinetischen Theorie nicht auslegen.

a) Die einfachste Erklärung dieses Phänomens ist in der Erwärmung der das beleuchtete Teilchen umgebenden Flüssigkeitsschichten zu suchen. Die von den Teilchen absorbierte strahlende Energie wird als Wärme den nächsten Flüssigkeitsschichten abgegeben und durch ein stationäres Temperaturgefälle wird sie in die ganze Flüssigkeit geleitet. Demnach befindet sich das Teilchen ständig in einer wärmeren Flüssigkeit als das Thermoelement anzeigt. Wir wollen jetzt prüfen, ob das Teilchen und die nächsten Flüssigkeitsschichten genügend hohe Temperaturen erreichen konnten, daß die gemessene Bewegungsvergrößerung eintreten möchte.

Aus der Einsteinschen Formel folgt

$$\overline{\Delta_0^2} : \overline{\Delta_1^2} = \frac{T_0}{\zeta_0} : \frac{T_1}{\zeta_1}.$$

Versuchsweise finden wir, daß die nächste Flüssigkeitsumgebung bei den Kohlenteilchen um $9,3^\circ \text{C}$ über die Temperatur des Thermoelementes erwärmt sein müßte, wenn die 45 Proz. Vergrößerung stattfinden soll.

Aus der Wärmeleitungstheorie folgt, daß in einem stationären Zustande eine Kugelschale von den Radien r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$) eine Wärmemenge Q

$$Q = 4 \pi k \frac{(T_1 - T_2) r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

in der Zeiteinheit passieren läßt, wenn k den Wärmeleitungs-
koeffizienten, und T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) die Temperaturen der
inneren und äußeren Kugelfläche bedeuten. Das Teilchen
absorbiert aus dem Lichtstrom I eine Wärmemenge Q'

$$Q' = \pi \varrho^2 I a,$$

wo $a = 0,95$ den Absorptionskoeffizienten und $\varrho = 4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$
den Radius der als kugelförmig betrachteten Kohlenteilchen
bedeutet. Für den stationären Zustand ist $Q = Q'$. Für
den Temperaturunterschied $\Delta T = T_1 - T_2$, welcher zwischen

der innersten Flüssigkeitsschicht mit Radius $r_1 = \varrho$ und eine sehr entfernten Schicht r , ($r \gg \varrho$) besteht, bekommen wir

$$\Delta T = \frac{Ia}{4k} \varrho = 0,0003^\circ \text{C}^1)$$

Die nötige Temperaturdifferenz beträgt $9,3^\circ \text{C}$, die wirklich mögliche $0,0003^\circ \text{C}$. Wir sehen, daß die Erklärung unserer Erscheinung durch die Erwärmung der Teilchenumgebung nicht gelingt.

b) Wenn wir außer der obigen Erwärmung der Flüssigkeit noch einen möglichen Temperatursprung an der Grenzfläche Teilchen-Flüssigkeit voraussetzen und so die Erklärung nur durch die erhöhte kinetische Energie des Teilchens suchen, so finden wir, daß dieser Sprung bei den Kohlenteilchen 132°C betragen müßte, wenn die gegebene Vergrößerung stattfinden sollte.²⁾ Die Temperatur der Kohlenteilchen müßte dann einen unzulässigen Wert von 152°C erreichen.

c) Die behandelte Erscheinung erinnert an den Crookes'schen Radiometer. Die unter dem Einfluß des Lichtes lebhafter sich bewegenden Rußteilchen sind ein *mikroskopischer Flüssigkeitsradiometer*. Wenn wir dieselbe auf die übliche Weise durch den Rückstoß der erwärmten Flüssigkeitsmoleküle zu erklären versuchen, so stoßen wir auf folgendes Dilemma. Entweder müssen die erwärmten Moleküle so hohe Temperatur besitzen, daß die gefundene Vergrößerung eintreten kann, und wir finden wie im Falle sub b), daß sie bis auf 152°C erwärmt sein müßten, was der Wärmeleitungstheorie widerspricht, oder wenn wir diese berücksichtigen, bekommen wir, daß die Moleküle wie in dem Falle sub a) nur so eine Erhöhung ihrer kinetischen Energie erfahren könnten welche einer Temperaturerhöhung von nur $0,0003^\circ \text{C}$ entspricht und die Vergrößerung kann dann nicht eintreten.

11. Versuch einer Erklärung der Erscheinung.

a) Kann die Bewegungsvergrößerung photoelektrisch erklärt werden? Setzen wir voraus, daß das von den Kohlenteilchen absorbierte Licht teilweise zur Emission der Photo-

1) Das Leitungsvermögen k des benutzten Gemisches Wasser-Glycerin wurde zu $1,2 \cdot 10^{-3}$ berechnet.

2) Berechnet aus dem Verhältnis $\overline{A}_0^2 : \overline{A}_1^2 = T_0 : T_1$.

elektronen dient. Die Rückstöße, welche diese Emission begleiten, möchten dann die Brownsche Bewegung der Teilchen vergrößern. Diese Idee wollen wir jetzt auf unserem konkreten Falle durch folgende Umschlagrechnung prüfen.

Das Kohlenteilchen machte in einer Sekunde die mittlere räumliche Verschiebung $\bar{\Delta} = 1 \cdot 10^{-4}$ cm. Betrachten wir sie als eine geradlinige. Bei der intensiven Beleuchtung absorbierte das Teilchen die Energie $W = 7,3 \cdot 10^{-3}$ erg/sec und seine räumliche Verschiebung betrug $1,21 \cdot 10^{-4}$ cm/sec. Die Bewegungsvergrößerung $d\Delta = 2,1 \cdot 10^{-5}$ cm/sec. Dieser Zuwachs $d\Delta$ stammt nicht aus der Molekularbewegung der Flüssigkeit und das Teilchen verbraucht nach dem Stokes'schen Gesetze die Energie

$$W_0 = 6\pi\zeta\varrho(d\Delta)^2 = 8,9 \cdot 10^{-15} \text{ erg/sec}$$

um ihn zu vollziehen. Zur Berechnung der Bewegungsenergie W_1 , welche das Teilchen durch die vorausgesetzte Elektronenemission bekommen kann, benutzen wir folgenden Satz, der unmittelbar aus der Impulsgleichheit folgt.

Aus der Energie e eines Emissionsvorganges bekommt der Körper m_1 die Energie e_1 und der Körper m_2 die Energie e_2 so, daß das Produkt Energie \times Masse konstant bleibt.

$$e_1 m_1 = e_2 m_2, \quad e_1 + e_2 = e.$$

Weil die Masse des Kohlenteilchens $m_1 = 4 \cdot 10^{-13}$ g un-
gemein größer als die des Elektrons $m_2 = 9 \cdot 10^{-28}$ g ist und
setzen wir $e = W$ und $e_1 = W_1$, so bekommen wir einfach
 $W_1 = W m_2 / m_1 = 1,6 \cdot 10^{-17}$ erg/sec. Weil $W_0 > W_1$, sehen wir,
daß auch in dem Falle, wenn die gesamte absorbierte Energie
photoelektrisch verbraucht und dabei alle Elektronen in der-
selben Richtung emittiert würden, die Rückstoßkräfte nicht
genügen die beobachtete Vergrößerung zu verursachen. —
Man könnte trotzdem auf der photoelektrischen Erklärung
unter der Annahme verharren, daß das emittierte Elektron
bei der Zurückkehrung dem ionisierten Brownschen Partikel
einen kleinen Teil seiner Bewegungsenergie zurückgibt.¹⁾

1) Z. B. wenn ein Elektron, welches mit dem Quant $h\nu = 5 \cdot 10^{-12}$ erg (berechnet für violettes Licht) emittiert wurde, nur $\frac{1}{5}$ Proz. seiner Bewegungsenergie dem Teilchen zurückgibt, würde schon die nötige Energie W_0 gedeckt sein.

b) *Die molekulare und die Brownsche Bewegung und ihre Vergrößerung durch das Licht ist eine Folge der Strahlung.* Betrachten wir die molekulare Bewegung als keine hypothetische, sondern als eine experimentelle Tatsache. Wenn wir die mechanische Weltanschauung verlassen, so handelt es sich darum, wie die Bewegung von einem energetischen Standpunkte aus zu erklären wäre.

Jedes Massenteilchen, dessen Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunktes liegt, steht durch unaufhörendes Strahlen mit der Umgebung im dynamischen Temperatungleichgewichte. Von dieser Strahlung setzen wir voraus, daß sie sich nicht nur quantenhaft, sondern auch strahlenartig abspielt, das ist, daß ein Energiequantum ϵ in einer festen Richtung gestrahlt (emittiert oder absorbiert) wird. Jeder dieser Akte wird mit einem Impuls $\epsilon/f(c)$ begleitet. $f(c)$ bedeutet eine Funktion der Lichtgeschwindigkeit.¹⁾

Da die Strahlung vollkommen unregelmäßig, sagen wir „brownisch“ vor sich geht, so wird das Massenteilchen durch die Impulse hin und her bewegt. Auch ein einziges in einem Vakuum schwebendes Massenteilchen macht die Brownsche Bewegung. Eine geradlinige Molekularbewegung existiert praktisch nicht. Die Umwandlung eines Bruchteiles der strahlenden Energie in die Bewegungsenergie des Teilchens und umgekehrt äußert sich durch den Dopplerschen Effekt. Wenn der Beweis gelingen wird, daß auch bei dieser Anschauungsweise die mittlere kinetische Energie eines Massenteilchens gleich $3RT/2N$ ist, so können wir uns auch von diesem Standpunkte aus die schönen Resultate der kinetischen Gastheorie aneignen.

Die zwei konstatierten Tatsachen (Abs. 9) sind jetzt leicht qualitativ erklärbar. Die Brownsche Bewegung dauert auch in der optischen Dunkelheit, weil bei der gewöhnlichen Temperatur die Moleküle und die Teilchen im langwelligen, unsichtbaren Gebiete strahlen. Absorbiert das Teilchen aus dem optischen Energiestrom die Energie W , so wird seine Brownsche Bewegung durch diese Absorption, weil sie nur in einer Richtung geschieht, nicht beeinflusst, sondern erst

1) Der Molekularstrahlungsdruck kann größer als der Bartolli-Maxwellsche ϵ/c sein.

durch die langwellige, brownische Wiederausstrahlung derselben wird sie gesteigert.

Im Mangel einer strengen Theorie versuchte ich durch folgende Überlegung auch zu einem quantitativen Aufschlusse darüber zu gelangen. Das fast vollkommen schwarze Kohlentelchen tauscht mit der Umgebung in einer Sekunde die Energie $W^* = 8\pi \rho^2 \sigma T^4$ aus, wo $4\pi \rho^2$ die Teilchenoberfläche und σ die Stefan-Boltzmannsche Konstante bedeutet. Während der intensiven Beleuchtung ist seine gesamte brownisch gestrahlte Energie gleich $W^* + W$.

Die Energie W^* bestehe aus n -Quanten, von deren Größe wir nichts voraussetzen. Legen wir durch das Teilchen eine feste Achse x . Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Quantum so strahlt, daß seine x -Komponente des Strahlungsdruckes in die $+x$ oder $-x$ -Richtung fällt, ist gleich groß und ist $\frac{1}{2}$. Für diesen Fall folgt aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß aus den n -Quanten ein Überschuß q

$$q = \frac{n}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

in der einen oder anderen Richtung ($+x$ oder $-x$) zu erwarten ist. Dieser Überschuß q , multipliziert mit den zugehörigen elementaren Energien und dividiert mit $f(c)$, liefert die wahrscheinliche resultierende Kraft, welche das Teilchen verschiebt.

Die Verschiebung Δ ist also proportionell der Quadratwurzel aus der gestrahlten Energie und die Quadrate $\overline{\Delta^2}$ sind proportionell der gestrahlten Energiemenge W^* , bzw. $W^* + W$. So folgt für das Verhältnis

$$\overline{\Delta_0^2} : \overline{\Delta_i^2} = W^* : (W^* + W) = 8\sigma T^4 : (8\sigma T^4 + I A).$$

Wenn wir in die letzte Gleichung die Zahlenwerte ($\sigma = 5,65 \cdot 10^{-5}$ erg/sec. qcm grad⁴, $T = 293$, $I = 2,2/60$ cal/sec. qcm, $A = 4,19 \cdot 10^7$ erg/cal) einsetzen, so berechnen wir für das Verhältnis der Verschiebungen der Kohlentelchen 100:146, und das Resultat der Messungen war 100:145.

Von dieser interessanten Übereinstimmung kann man wohl nicht behaupten, daß sie einen sicheren Beweis für die oben gemachten Voraussetzungen darstellt, aber trotzdem

kann sie die Vermutung berechtigen, daß in der Sache ein großes Stück der objektiven Wahrheit liegt.¹⁾

Ich hoffe, daß sich ein Theoretiker findet, der die hier skizzierte Frage lösen wird.

Ich halte es für meine angenehme Pflicht, an dieser Stelle dem Hrn. Prof. Dr. V. Posejpal, welcher mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte, meinen besten Dank auszusprechen.

Zusammenfassung

Es wurde experimentell quantitativ festgestellt

a) Im Einklang mit der bisherigen Anschauung, daß die Brownsche Bewegung der Substanzen, welche das benutzte Licht nicht absorbieren (Mastix), ohne Rücksicht auf die Intensität der Beleuchtung unverändert bleibt und daß sie deshalb auch in der optischen Dunkelheit andauert.

b) Im Gegensatz zu der bisherigen Anschauung, nach welcher die benutzte intensive Beleuchtung die Bewegung nur in dem Maße vergrößern kann, soweit sie die Temperatur der Flüssigkeit erhöht und ihre Viskosität herabsetzt, wurde konstatiert, daß die Bewegung der das Licht absorbierenden Substanzen (Kohle, Gummigutt) durch eine intensive Beleuchtung um viel mehr vergrößert wird, als zu erwarten wäre.

Die Bewegungsvergrößerung stellt eine verwandte Erscheinung der Photophorese und des Radiometers vor und läßt sich nicht im Rahmen der kinetischen Theorie erklären. Sie könnte entweder photoelektrisch oder besser unter der Annahme, daß die molekulare Bewegung eine Folge der schwarzen Strahlung ist, erklärt werden.

Gearbeitet 1921—23 im Physikalischen Institute der Karlova-Universität in Prag.

1) Der Gedanke, daß der Strahlungsdruck die molekulare Bewegung verursachen kann, ist nicht neu, wie ich aus dem Buche Eucken, „Die Theorie der Strahlung und der Quanten“, erfahren hatte. Besonders interessant ist die Vermutung von Solvay (dortselbst S. 3 und 369), nach der sich ein Teilchen nur dann bewegt, wenn es strahlt. Vgl. auch Einstein und Hopf, Ann. d. Phys. **33**, S. 1105. 1910. Mit Anwendung des Strahlungsdruckes könnte man auch die Ehrenhaftsche Photophorese unter der Annahme erklären, daß die intensiv beleuchteten submikroskopischen Teilchen die absorbierte Energie größtenteils entweder auf der beleuchteten oder auf der unbeleuchteten Seite ausstrahlen.

(Eingegangen 28. Mai 1927)